Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Добрянский гуманитарно–технологический техникум им. П. И. Сюзева»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ВНЕАУДИТОРНЫХ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ ОБУЧАЮЩИХСЯ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ЕН.01 «МАТЕМАТИКА»

для специальности

46.02.01 «Документационное обеспечение управления и архивоведение»

Добрянка, 2021

Рассмотрено
на заседании П(Ц)К общеобразовательных, гуманитарных и естественнонаучных дисциплин

«14» 05 2021 г.

Председатель П(Ц)К общеобразовательных, гуманитарных и естественнонаучных дисциплин

______________ Г.П. Трушникова

ОДОБРЕНО методическим советом ГБПОУ ДГТТ им. П.И. Сюзева

Протокол № 5 от «14» 05 2021г.
Заведующий структурного подразделения

______________ М.К. Рябкова

Составитель: Трушникова Галина Петровна, преподаватель ГБПОУ «Добрянский гуманитарно-технологический техникум им. П.И. Сюзева»

Рецензенты:

Внешние:

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации к выполнению внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине ЕН.01 Математика предназначены для обучающихся по специальности: 46.02.01 «Документационное обеспечение управления и архивоведение»

Цель методических рекомендаций: оказание помощи обучающимся в выполнении самостоятельной работы по дисциплине ЕН.01 Математика.

Настоящие методические рекомендации содержат работы, которые позволят обучающимся самостоятельно овладеть фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по специальности, опытом творческой и исследовательской деятельности и направлены на формирование следующих компетенций:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 9. Ориентироваться в условиях постоянного изменения правовой базы.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

-систематизации и закрепления полученных знаний и практических умений и навыков студентов;

- углубления и расширения теоретических и практических знаний;

- формирования умений использовать специальную, справочную литературу, Интернет;

- развития познавательных способностей и активности студентов, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;

-формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;

- развития исследовательских знаний.

Самостоятельные работы являются важным средством проверки уровня знаний, умений и навыков.

Критериями оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы студента являются:

- уровень освоения студентом учебного материала;
- умение студента использовать теоретические знания при решении задач;
- обоснованность и четкость изложения ответа;
- оформление материала в соответствии с требованиями ФГОС.

Описание каждой самостоятельной работы содержит: тему, цели работы, задания, основной теоретический материал, алгоритм выполнения типовых задач, порядок выполнения работы, формы контроля, требования к выполнению и оформлению заданий. Для получения дополнительной, более подробной информации по изучаемым вопросам, приведено учебно-методическое и информационное обеспечение.

Перечень видов самостоятельной работы представлен в таблице 1.

Таблица 1

№ темы	Кол-во часов	Вид самостоятельной работы	Форма контроля
1-7	2-4	Работа с конспектом с последующим выполнением заданий	Проверка выполнения предложенных заданий
1-7	2-4	Подготовка к практическим занятиям	Проверка выполнения предложенных заданий
4	4	Подготовка презентаций	Защита презентаций
1-7	2	Решение задач	Проверка выполнения предложенных заданий
7	6	Подготовка к экзамену	Проверка выполнения предложенных заданий

Указания к выполнению ВСР

1. ВСР нужно выполнять в отдельной тетради в клетку. Необходимо оставлять поля шириной 5 клеточек для замечаний преподавателя.
2. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.
3. Оформление решения задачи следует завершать словом «Ответ».
4. После получения проверенной преподавателем работы студент должен в этой же тетради исправить все отмеченные ошибки и недочеты. Вносить исправления в сам текст работы после ее проверки запрещается.
5. Оценивание индивидуальных образовательных достижений по результатам выполнения ВСР производится в соответствии с универсальной шкалой (таблица).

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Тема 1 «Теория пределов».

Самостоятельная работа

Цель:

- ознакомиться с понятием предела числовой последовательности;
- ознакомиться с понятием предела функции;
- научиться раскрывать неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов

Порядок выполнения внеаудиторной самостоятельной работы:

1. Самостоятельная работа по подготовке к практическим занятиям. Рассмотрение примеров на вычисление первого и второго замечательных пределов.
2. Самостоятельная работа с конспектом лекций. Выписать правила на раскрытие основных видов неопределенностей

Тема « Предел функции в точке. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Раскрытие неопределённостей»

Определение: Число A называется ***пределом функции*** y = f(x) при x, стремящемся к a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число

$\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство:

$|f(x) - A| < \varepsilon$. Это записывается так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Функция f(x) называется ***бесконечно малой*** при x→ a, если: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Функция f(x) называется ***бесконечно большой*** при x→ a, если: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ или, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Отметим свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.

1^0. Если функции f(x) и g(x) – бесконечно малые при x→ a, то их сумма f(x) + g(x) при x→ a также является бесконечно малой.

2^0. Если функция f(x) – бесконечно малая при x→ a, а F(x) – ограниченная функция, то их произведение f(x) · F(x) – есть функция бесконечно малая.

Следствие. Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть величина бесконечно малая.

3^0. Если при x→ a функция f(x) имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, а функция g(x) – бесконечно большая, то

$\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \infty$, а $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$

4^0. Если функция f(x) – бесконечно малая при x→ a, то функция 1/ f(x) – бесконечно большая, причем предполагается, что в окрестности точки а функция f(x) не обращается в нуль. Наоборот, если при x→ a функция g(x) – бесконечно большая, то функция 1/ g(x) – бесконечно малая.

Теоремы о пределах.

T1: Если основная элементарная функция определена в предельной точке x=a, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

T2: Если C – постоянная величина, то $\lim\limits_{x\to a} C = C$

T3: Если C – постоянная величина, то $\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = C\lim\limits_{x\to a} f(x)$

T4: Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то

1. $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \pm \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$*(предел суммы равен сумме пределов)*

2. $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$*предел произведения равен произведению пределов)*

3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0$ (*предел отношения равен отношению пределов)*

4. $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)^{f_2(x)} = \lim\limits_{x\to a} f_1(x)^{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$

Техника вычисления пределов

Примеры. *Вычислить пределы:*

1. $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3 - 6x^2 + x - 5)$

По правилу нахождения предела многочлена находим

$\lim\limits_{x\to 2}(5x^3 - 6x^2 + x - 5) = 5 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 2 - 5 = 13$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5}{4x-8}$

Здесь предел числителя равен нулю $\lim\limits_{x\to 2}(4x - 8) = 4 \cdot 2 - 8 = 0$ Следовательно теорему о пределе частного применить нельзя. Так как

$\lim\limits_{x\to 2}(4x - 8) = 0$, то 4x – 8 при x→ 2 есть величина бесконечно малая, а обратная ей величина $\frac{1}{4x-8}$ - бесконечно большая. Поэтому при x→ 2произведение $\frac{1}{4x-8} \cdot 5$ есть величина бесконечно большая, т.е. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5}{4x-8} = \infty$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2 - 2x}{2x^2 - 5x}$

Здесь пределы числителя и знаменателя при x→ 0 равны нулю. Непосредственной подстановкой вместо аргумента его предельного значения вычислить предел нельзя, так как при x→ 0 получается отношение двух бесконечно малых величин.

Разложим числитель и знаменатель на множители, чтобы сократить дробь на общий множитель, стремящийся к нулю, и, следовательно, сделать возможным применение теоремы 3.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(3x-2)}{x(2x-5)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-2}{2x-5} = \frac{3\cdot 0-2}{2\cdot 0-5} = \frac{2}{5}$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$

Пределы числителя и знаменателя при $x\to 3$ равны нулю:

$\lim\limits_{x\to 3}(x^2-5x+6)=0$ и $\lim\limits_{x\to 3}(3x^2-9x)=0$. Разложим квадратный трехчлен в числителе на линейные множители по формуле $ax^2+вx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 - корни трехчлена. Разложив на множители и знаменатель, сократим дробь на x-3. Получим

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{3x(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{x-2}{3x} = \frac{3-2}{3\cdot 3} = \frac{1}{9}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$

Пределы числителя и знаменателя при $x\to 0$ равны нулю. Умножив числитель и знаменатель на сопряженный знаменателю множитель

$\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}$ и затем сократив дробь на x, получим

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x})(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x})}{-2x} =$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}}{-2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{-2} = -\sqrt{5}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^2+3}{3x^4-5}$

При $x\to\infty$ числитель и знаменатель – величины бесконечно большие. Поэтому при непосредственном применении теоремы 3 получаем выражение ∞/∞, которое представляет собой неопределенность Для вычисления предела этой функции нужно числитель и знаменатель разделить на наивысшую степень аргумента, т. е. на x^4:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^2+3}{3x^4-5} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^4}}{3-\frac{5}{x^4}} = \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$

Задание 2.

Раскрыть неопределенность $\frac{0}{0}$ и вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+5x-3}{\log_2(x^2+1)}$
2. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$
4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$
5. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$
6. $\lim\limits_{x\to 1,5}\frac{2x^2-x-3}{2x^2-5x+3}$
7. $\lim\limits_{x\to -0,5}\frac{2x^2-7x-4}{-2x^2+5x+3}$
8. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{16-x^2}{x^3-64}$

Вычислить пределы, используя изученные теоремы о пределах.

1.. $\lim\limits_{x\to 1,5}\frac{2x^2-x-3}{2x^2-5x+3}$

2. $\lim\limits_{x\to -0,5}\frac{2x^2-7x-4}{-2x^2+5x+3}$

3. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{16-x^2}{x^3-64}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{x+9}}{x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}$

7. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x-1}$

9. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2-\sqrt{6+x}}{\sqrt{7-x}-3}$

Раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ и вычислить пределы:

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+5}{6x^3+7x+3}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-x-5x^2}{6+3x+7x^2}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x^2-8}{6x^2-9x+1}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2-4}{3x^4-8x+1}$

Тема «Первый замечательный предел. Второй замечательный предел»

При вычислении пределов тригонометрических функций часто используется предел отношения синуса дуги к самой дуге:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

Эта формула носит название **первого замечательного предела**. Рассмотрим примеры на применение этой формулы.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}$

Очевидно, что при $x\to -\frac{\pi}{2}$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю. Разложив числитель и знаменатель на множители и сократив дробь на

$1+\sin x$, получим

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}=\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{(1+\sin x)(1-\sin x+\sin^2 x)}=\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1-\sin x+\sin^2 x}=$$

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin(-\frac{\pi}{2})}{1-\sin(-\frac{\pi}{2})+\sin^2(-\frac{\pi}{2})}=\frac{1+1}{1+1+1+1}=\frac{2}{3}$$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}$

Преобразуя заданное выражение и используя первый замечательный предел, получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{4\cdot 3x}=\frac{4}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=\frac{4}{3}\cdot 1=\frac{4}{3}$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x}$

Преобразовав разность косинусов в произведение по формуле

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\sin x}{x}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\lim_{x\to 0}\sin x=4\cdot 1\cdot 0=0$$

Имеет место соотношение $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e}$, которое называется **вторым замечательным пределом**. Число ***e*** – иррациональное

($e\approx 2,718\ldots$) Логарифмы с основанием e называются натуральными, для них введено обозначение ***ln.***

Пример 4. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^x$

Выполнив преобразования и используя второй замечательный предел, находим: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x/3})^{(\frac{x}{3})\cdot 3}=[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x/3})^{(\frac{x}{3})}]^3=e^3$

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{5}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2\cdot 5} = [\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^{10} = e^{10}$

Пример 6. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{1+x})^x = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x})^{-x} = [\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x]^{-1} = e^{-1}$

Задание 2.

1 Вычисление пределов тригонометрических выражений

1. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$
2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\mathrm{tg}x-1}$

2. Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{9x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 14x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{x}{5}}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x\cdot\cos x}{5x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}6x}{\sin 8x}$
8. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{x^2-1}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin 4x}{x}$
10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$

3. Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{7}{x})^x$
12. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^x$
13. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^{\frac{x}{7}}$
14. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{3x})^{4x}$
15. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{5}{4x})^{\frac{x}{2}}$

Контроль знаний обучающихся:

- проверить самостоятельную работу;

Требования к оформлению практической работы:

Задание должно быть выполнено в тетради для самостоятельных работ

Работу сдать после занятия

Тема 2. «Дифференциальное исчисление».

Самостоятельная работа:

Цель:

- повторить основные формулы и правила дифференцирования;
- изучить производные тригонометрических, логарифмических и показательных функций
- повторить правило для нахождения производных сложных функций
- изучить правило для нахождения производных высших порядков

Порядок выполнения внеаудиторной самостоятельной работы:

1. Самостоятельная работа с конспектом занятия. Рассмотрение правил и примеров на вычисление производных различных функций.

2. Самостоятельная работа по подготовке к практическим занятиям. Рассмотрение примеров на исследование и построение графиков функций.

Тема «Производные сложных функций».

Пусть y = y(u) и u = u(x) – дифференцируемые функции. Тогда сложная функция y = y(u(x)) есть также дифференцируемая функция, причем

$y'_x = y'_u \cdot u'_x$ Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций: ***производная сложной функции равна произведению производных функций, её составляющих.***

Примеры:

1. $y(x) = \ln(x^3 - 3x^2 + 4x)$

$y'(x) = (\ln(x^3 - 3x^2 + 4x))' \cdot (x^3 - 3x^2 + 4x)' = \frac{1}{x^3-3x^2+4x}(3x^2 - 6x + 4) =$

$$= \frac{3x^2 - 6x + 4}{x^3 - 3x^2 + 4x}$$

2. $y(x) = e^{\arccos x}$

$y'(x) = (e^{\arccos x})' \cdot (\arccos x)' = e^{\arccos x} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $y(x) = \sin(\ln\sqrt{x})$

$y'(x) = (\sin(\ln\sqrt{x}))' \cdot (\ln\sqrt{x})' \cdot (\sqrt{x})' = \cos(\ln\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos(\ln\sqrt{x})}{2x}$

4. $y(x) = \ln\sqrt{\sin x}$

$y'(x) = (\ln\sqrt{\sin x})' \cdot (\sqrt{\sin x})' \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x = \frac{1}{2\sin x} \cdot \cos x = \frac{1}{2}\mathrm{tg}x$

5. $y(x) = \mathrm{arctg}\ln 2x$

$y'(x) = \frac{1}{1+(\ln 2x)^2} \cdot (\ln 2x)' \cdot (2x)' = \frac{1}{1+(\ln 2x)^2} \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x(1+\ln^2 2x)}$

6. $y(x) = (6x^2 - \frac{2}{x^4} + 5)^2$

$y(x) = (6x^2 - 2x^{-4} + 5)^2$

$y'(x) = 2(6x^2 - 2x^{-4} + 5) \cdot (6x^2 - 2x^{-4} + 5)' = 2(6x^2 - 2x^{-4} + 5) \cdot (12x + 8x^{-5}) =$

$= (12x^2 - \frac{2}{x^4} + 5) \cdot (12x + \frac{8}{x^5})$

Примеры для самостоятельного решения:

7. $y(x) = \cos\sqrt{x^2 + 3}$ Найти: y'(x)
8. $y(x) = \arcsin\ln 4x$ Найти: y'(x)
9. $y(x) = \sin 4x \cdot e^{\mathrm{ctg}x}$ Найти: y'(x)

Тема «Производные и дифференциалы высших порядков»

Производная второго порядка (вторая производная) от функции y = f(x) есть производная от её первой производной: $y'' = (f'(x))'$

Производная третьего порядка (третья производная) от функции y = f(x) есть производная от её второй производной: $y''' = (f''(x))'$

Производная n-го порядка (*n*-я производная) от функции y = f(x) есть производная от её (n – 1)-й производной: $y^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'$

Дифференциал второго порядка (второй дифференциал) функции y = f(x) есть дифференциал от её первого дифференциала: $d^2y = d(dy)$

Дифференциал третьего порядка (третий дифференциал) функции y = f(x) есть дифференциал от её второго дифференциала: $d^3y = d(d^2y)$

Дифференциал n-го порядка (*n*-й дифференциал) функции y = f(x) есть дифференциал от её (*n* – 1)-го дифференциала: $d^ny = d(d^{n-1}y)$

Если x независимая переменная, то $d^ny = y^{(n)} \cdot dx^n$, откуда $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$,

т. е. *n*-я производная функции y = f(x) равна отношению её *n*-го дифференциала d^ny к *n*-й степени дифференциала независимой переменной dx.

Если функция имеет производную *n-го порядка*, то говорят, что ***функция дифференцируемаn раз***

Примеры: Найти производные второго порядка от указанных функций

1. $y(x) = (2x+5)^3$

$y'(x) = 3(2x+5)^2 \cdot (2x+5)' = 3(2x+5)^2 \cdot 2 = 6(2x+5)^2$

$y''(x) = (6(2x+5)^2)' = 6\cdot 2(2x+5)\cdot 2 = 24(2x+5)$

2. $y(x) = e^x\cos x$

$y'(x) = (e^x)'\cos x + e^x(\cos x)' = e^x\cos x + e^x(-\sin x) = e^x(\cos x - \sin x)$

$y''(x) = (e^x)'(\cos x - \sin x) + e^x(\cos x - \sin x)' = e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x) = e^x(\cos x - \sin x - \sin x - \cos x) = -2e^x\sin x$

3. Найти второй дифференциал и третью производную от функции $y = x\ln 2x$ в точке $x = 2$

Решение: Дифференцируя данную функцию, получим

$y'(x) = \ln 2x + x\cdot\frac{2}{2x} = \ln 2x + 1$

Дифференцируя производную y', найдем вторую производную

$y'' = (y'(x))' = (\ln 2x + 1)' = (\ln 2 + \ln x + 1)' = \frac{1}{x}$

и второй дифференциал $d^2y = \frac{1}{x}dx^2$.

Таким образом, третья производная $y''' = (y'')' = -\frac{1}{x^2}$

При x = 2 имеем $y'''(2) = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4}$

Примеры для самостоятельного решения:

Найти производные второго порядка от функций

4. $y = e^{-x^2}$

5. $y = \operatorname{tg} x$

6. $y(x) = 2\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + 1$ Найти: y'(x).

7. $y(x) = \sqrt[4]{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x} + 3x$ Найти: y'(1).

8. $y(x) = 4x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt[3]{x^4}} - \frac{4}{x^5}$ Найти: y'(1).

9. $y(x) = \sqrt[4]{x^5} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6}{x^3} - \frac{3}{x} + 5x^2$ Найти: y'(1).

10. $y(x) = \frac{\log_5 x}{5^x}$ Найти: y'(x)

11. $y(x) = (\cos x - 2^x)(4^x + 3\sin x)$ Найти: y'(x)

12. $y(x) = (x^5 - \sqrt[3]{x} + 1)^5$ Найти: y'(x)

13. $y(x) = e^{\sin^2 x}$ Найти: y'(x)

14. $y = \sqrt{1 + x^2}$ Вычислить производную второго порядка

15. $y = \ln(2x - 3)$ Вычислить производную второго порядка

Тема «Применение производной к исследованию функций и построению графиков. Промежутки монотонности и экстремумы функции»

Функция называется ***возрастающей (убывающей)*** в некотором промежутке, если в этом промежутке каждому большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции. Как возрастающие, так и убывающие функции называются ***монотонными.***

Монотонность функции *y = f(x)* характеризуется знаком её первой производной *f '(x)*, а именно, ***если в некотором промежутке f '(x)*** > 0

[***f '(x)*** < 0]***, то функция возрастает (убывает) в этом промежутке.***

Отсюда получаем **правило для нахождения промежутков монотонности функции *y = f(x).***

1. Найти нули и точки разрыва *f '(x).*

2. Определить знак f '(x) в промежутках, на которые полученные в п. 1 точки делят область определения функции *f(x)*; промежутки, в которых *f '(x)*> 0, являются промежутками возрастания функции, а промежутки, в которых

f '(x)< 0, являются промежутками убывания функции. При этом если на двух соседних промежутках, граничная точка которых является нулем производной *f '(x),* знак *f '(x)* одинаков, то они составляют единый промежуток монотонности.

Точка $x = x_0$ называется ***точкой максимума (минимума)*** функции *y = f(x),* если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x(x \neq x_0)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ (соответственно $f(x)>f(x_0)$)

Точки максимума и минимума функции называются ***точками её экстремума***, а значение функции в точке максимума (минимума) – ***максимумом (минимумом)*** или ***экстремумом*** функции.

Точками экстремума являются лишь те из критических точек, при переходе через которые первая производная $f'(x)$ меняет знак, а именно, ***если при переходе через критическую точку $x = x_0$ в положительном направлении $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то $x = x_0$ есть точка максимума (минимума).***

Отсюда получаем **правило отыскания экстремумов функции $y = f(x)$.**

1. Найти нули и точки разрыва $f'(x)$.

2. Определить знак $f'(x)$ в промежутках, на которые полученные в п. 1 точки делят область определения функции $f(x)$.

3. Из этих точек выделить те, в которых функция $f(x)$ определена и по разные стороны от каждой из которых производная $f'(x)$ имеет разные знаки – это и есть экстремальные точки. При этом экстремальная точка $x = x_0$ является точкой максимума, если при движении по оси Ox в положительном направлении она отделяет промежуток, в котором $f'(x)> 0$, от промежутка, в котором $f'(x)< 0$, и точкой минимума в противном случае.

Заметим, что точки, в которых производная обращается в нуль, иногда проще исследовать на экстремум, выяснив знак второй производной $f''(x_0)$: ***точках $= x_0$, в которой $f''(x_0) = 0$, а $f''(x)$ существует и отлична от нуля, является экстремальной,*** а именно ***точкой максимума, если $f''(x_0) < 0$, и точкой минимума, если $f''(x_0) > 0$.***

Примеры для самостоятельного решения.

Найдите промежутки монотонности следующих функций:

1. $y = x^4 - 32x + 40$
2. $y = \ln x - \frac{1}{3}x^3$
3. $y(x) = \frac{x^2-12}{x-4}$

Исследовать функцию на экстремумы:

4. $y(x) = 3x^4 - 4x^3$
5. $y(x) = \frac{x^2+16}{x+3}$

Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба».

Кривая называется ***выпуклой (вогнутой)*** в некотором промежутке, если она расположена ниже(выше) касательной, проведенной к кривой в любой точке этого промежутка. Выпуклость или вогнутость кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$, характеризуется знаком второй производной $f''(x)$, а именно, ***если в некотором промежутке $f''(x)< 0$ (соответственно $f''(x)> 0$), то кривая выпукла (вогнута) в этом промежутке.***

Точкой перегиба кривой называется такая её точка, которая отделяет участок выпуклости от участка вогнутости.

Точками перегиба графика функции $y = f(x)$ являются лишь те из указанных точек, ***при переходе через которые вторая производная $f''(x)$ меняет знак.***

Отсюда получаем **правило отыскания промежутков выпуклости и вогнутости и точек перегиба графика функции.**

1. Найти точки, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

2. Определить знак $f''(x)$ в промежутках, на которые полученные в п. 1 точки делят область определения $f(x)$; промежутки, в которых

$f''(x)> 0$, –промежутки вогнутости, а промежутки, в которых $f''(x)< 0$, - промежутки выпуклости графика функции $y = f(x)$.

3. Из полученных в п. 1 точек выделить те, в которых функция $f(x)$ определена и по разные стороны от каждой из которых вторая производная

$f''(x)$ имеет противоположные знаки, - это и есть абсциссы точек перегиба графика функции $y = f(x)$.

Тема «Асимптоты»

Прямая $Ax + By + C = 0$ называется ***асимптотой*** кривой $y = f(x)$, если расстояние от этой прямой до точки $M(x;\ f(x))$ данной кривой стремится к нулю при $x^2 + y^2 \to \infty$. Различают три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Если по крайней мере один из пределов функции $y = f(x)$ в точке a справа или слева равен бесконечности, т. е. если

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$,

то прямая $x = a$ является ***вертикальной асимптотой.***

Если существует конечный предел функции при $x\to +\infty$ или $x\to -\infty$, т. е. если $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = в$ или $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = c$, то прямая $y = в$ ($y = c$) является ***горизонтальной асимптотой*** (при $x\to +\infty$ она называется ***правой***, а при $x\to -\infty$ - ***левой).***

Если существуют пределы

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1$ и $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - k_1x] = b_1$,

то прямая $y = k_1x + b_1$ служит ***наклонной (правой) асимптотой.***

Аналогично, если существуют пределы

$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2$ и $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - k_2x] = b_2$,

то прямая $y = k_2x + b_2$ служит ***наклонной (левой) асимптотой.***

Заметим, что горизонтальную асимптоту можно рассматривать как частный случай наклонной асимптоты при $k = 0$.

Примеры.

1. Найти асимптоты кривой $y = \frac{-5x+3}{x+2}$

Решение. Кривая имеет вертикальную асимптоту $x = -2$, так как

$\lim\limits_{x\to -2-0} \frac{-5x+3}{x+2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -2+0} \frac{-5x+3}{x+2} = +\infty$

($x = -2$ – точка разрыва II рода).

Найдем горизонтальную асимптоту: $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{-5x+3}{x+2} = -5$.

Итак, данная кривая имеет вертикальную асимптоту $x = -2$ и горизонтальную асимптоту $y = -5$.

2. Найти асимптоты кривой $y = \frac{-x^2+7x}{x-3}$

Решение. Кривая имеет вертикальную асимптоту $x = 3$, поскольку

$\lim\limits_{x\to 3-0} \frac{-x^2+7x}{x-3} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 3+0} \frac{-x^2+7x}{x-3} = -\infty$.

Так как при $x\to \infty$ функция не имеет конечного предела, то горизонтальных асимптот у данной кривой нет. Ищем наклонные асимптоты:

$k = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{-x^2+7x}{(x-3)x} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{-x^2+7x}{x^2-3x} = -1$

$b = \lim\limits_{x\to \pm\infty} (y - кx) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(\frac{-x^2+7x}{x^2-3x} - x\right) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{4x}{x-3} = 4$

Следовательно, прямая $y = -x + 4$ служит наклонной асимптотой (рис. 1)

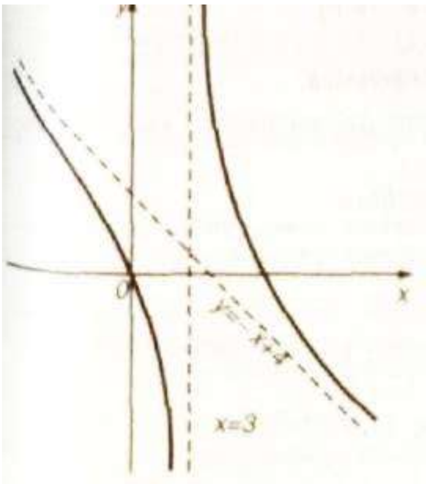


рис 1

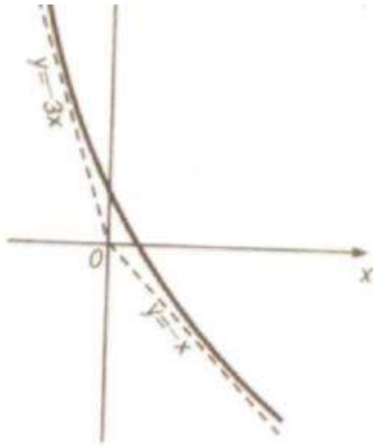


рис 2

Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба графики следующих функций:

1. $y = 3x^5 - 10x^4 - 30x^3 + 12x + 7$
2. $y = \frac{x}{x^2 + 9}$
3. $y = \ln(x^2 + 4)$

Найти асимптоты заданных кривых:

4. $y = \frac{2x+1}{x-3}$
5. $y = \frac{x^2-1}{x}$

Тема «Общая схема исследования функции и построение её графика»

1. Найти ***область определения*** функции D(f)

2. Выяснить, не является ли функция чётной или нечётной, периодической. Функция является ***чётной***, если для любого x из области определения функции выполняется равенство f(-x) = f(x). График чётной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция является ***нечётной***, если для любого x из области определения функции выполняется равенство f(-x) =- f(x). График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Функция называется ***периодической***, если существует такое число P, что для любого x из области определения функции выполняется равенство:

f(x-P) = f(x) = f(x+P).

3. Найти ***точки пересечения графика функции с осями координат***.

x=0. y=… y=0. x=…

4. Найти ***асимптоты*** графика функции.

Асимптотой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка графика функции при неограниченном удалении от начала координат. График функции имеет вертикальную асимптоту при x→ a, если $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. График функции имеет горизонтальную асимптоту, если $\lim_{x\to\infty} f(x)$ = b. График функции имеет наклонную асимптоту y = kx +b, если существуют такие числа k и b, что выполняются равенства: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ = k $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x$ = b

5. Найти ***промежутки монотонности и её экстремумы***. Вычислить значения функции в точках экстремума.

6. Найти ***промежутки выпуклости - вогнутости графика функции и точки перегиба***. Выпуклость вниз или вверх графика функции характеризуется знаком её второй производной: если в некотором промежутке f''(x)>0, то график функции выпуклый вниз в этом промежутке; если же f''(x)<0, то график функции выпуклый вверх. Точка графика функции, разделяющая промежутки выпуклости разных направлений этого графика, называется точкой перегиба.

7. ***Построить график***, используя полученные результаты исследования.

Пример 1.

1. Построить график функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

Решение. 1. Функция определена на всей числовой прямой, т. е. D(y) = R.

2. Данная функция не является ни четной, ни нечетной; кроме того, она не является периодической.

3. Найдем точку пересечения графика с осью Oy: полагая $x = 0$, получим $y = -3$. Точки пересечения графика с осью Ox в данном случае найти затруднительно.

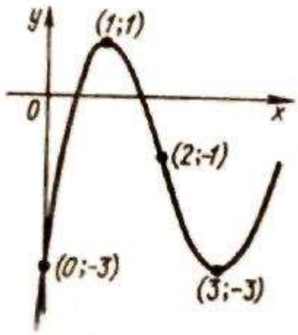
4. Очевидно, что график функции не имеет асимптот.

5. Найдем производную: $y' = 3x^2 - 12x + 9$. Далее, имеем $3x^2 - 12x + 9 = 0 \leftrightarrow$ $x^2 - 4x + 3 = 0 \leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$. Полученные точки делят область определения функции на три промежутка: $(-\infty,1)$, $(1, 3)$, $(3, +\infty)$. В промежутках $(-\infty,1)$ и $(3, +\infty)$ $y' > 0$, т. е. функция возрастает, а в промежутке $(1, 3)$ $y' < 0$, т. е. функция убывает. При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку $x = 3$ – с минуса на плюс. Значит, $y_{max} = y(1) = 1$, $y_{min} = y(3) = -3$

6. Найдем вторую производную $y'' = 6x - 12$; $6x - 12 = 0$, $x = 2$. Точка $x = 2$ делит область определения функции на два промежутка $(-\infty, 2)$ и $(2, +\infty)$. В первом из них $y'' < 0$, а во втором $y'' > 0$, т. е. в промежутке $(-\infty, 2)$ кривая выпукла, а в промежутке $(2, +\infty)$ кривая вогнута.

Таким образом, получаем точку перегиба (2; -1)

7. Используя полученные данные, строим искомый график (см. рис.).



Пример 2. Построить график функции $y = \frac{x^2}{x-3}$

1. Находим область определения функции $D(y) = (-\infty, 3) \cup (3. +\infty)$

2. Данная функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

3. При $x = 0$ получим $y = 0$, т. е. график проходит через начало координат.

4. Так как $\lim\limits_{x\to 3\pm 0} f(x) = \pm\infty$, то прямая $x = 3$ служит вертикальной асимптотой графика.

Далее находим $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x(x-3)} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (y - kx) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [\frac{x^2}{x-3} - x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{x-3} = 3$

Следовательно, прямая $y = x + 3$ является наклонной асимптотой графика.

5. Находим $y' = \frac{2x(x-3) - x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x}{(x-3)^2} = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}$

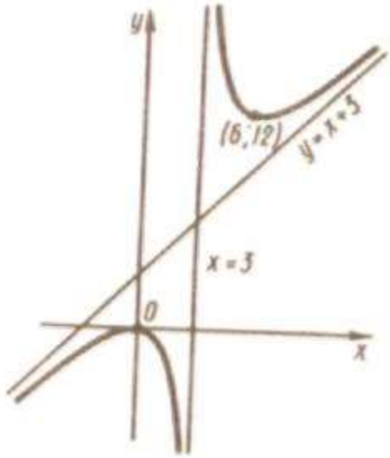
Производная y' обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = 6$ и терпит разрыв при $x = 3$. Этими точками числовая прямая делится на четыре промежутка:

$(-\infty,0)$, $(0, 3)$, $(3, 6)$, $(6, +\infty)$. Исследуем знак y' в каждом из них. Очевидно, что $y' > 0$ в промежутках $(-\infty,0)$ и $(6, +\infty)$ (в этих промежутках функция возрастает) и $y' < 0$ в промежутках $(0, 3)$ и $(3, 6)$ (в этих промежутках функция убывает). При переходе через $x = 0$ производная меняет знак с плюса на минус, т. е. это точка максимума, а при переходе через $x = 6$ – с минуса на плюс, т. е. это точка минимума. Находим $y_{max} = y(0) = 0$, $y_{min} = y(6) = 12$.

Находим $y'' = \frac{(2x-6)(x-3)^2 - 2(x-3)(x^2-6)}{(x-3)^4} = \frac{18}{(x-3)^4}$

Вторая производная в нуль нигде не обращается и терпит разрыв при $x = 3$. В промежутке $(-\infty,3)$ имеем $y'' < 0$, т. е. в этом промежутке кривая выпукла; а в промежутке $(3, +\infty)$ имеем $y'' > 0$, т. е. в этом промежутке кривая вогнута. Точек перегиба нет.

7. На основании полученных данных строим график функции (см. рис.)



*Пример 3.*Построить график функции $y = xe^x$

1. Здесь D(y) = R.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной. Исследуемая функция непериодична.

3. При x = 0 имеем y = 0, т. е. график функции проходит через начало координат.

4. Так как $y \to 0$ при $x \to -\infty$, то исследуемая кривая имеет левую горизонтальную асимптоту – прямую y = 0. Вертикальных и наклонных асимптот кривая не имеет.

5. Найдем производную данной функции $y' = e^x + xe^x = e^x(x+1)$.

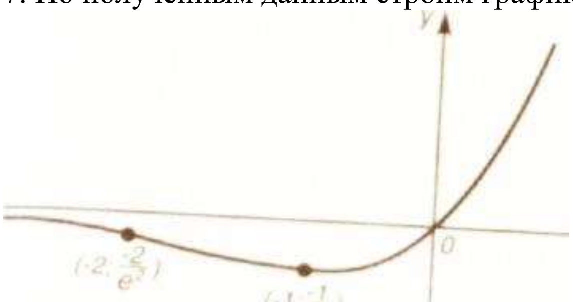
Производная y' обращается в нуль при x = -1. Точка x = -1 делит область определения функции на два промежутка (-∞,-1) и (-1, +∞), в первом из которых $y' < 0$, а во втором $y' > 0$. Следовательно, исследуемая функция в промежутке (-∞,-1) убывает, а в промежутке (-1, +∞) возрастает. Точка x = -1 есть точка минимума, минимум функции $y_{min} = y(-1) = -\frac{1}{e}$.

6. Находим вторую производную $y'' = e^x(x+1) + e^x = e^x(x+2)$.

Она обращается в нуль при x = - 2; мы получили два промежутка знакопостоянства второй производной: (-∞,-2) и (-2, +∞). В первом из них

$y'' < 0$, т. е. в этом промежутке кривая выпукла; а в промежутке (-2, +∞) имеем $y'' > 0$, т. е. в этом промежутке кривая вогнута. Точка x = -2 – абсцисса точки перегиба. Точка перегиба имеет координаты $(-2, -\frac{2}{e^2})$.

7. По полученным данным строим график функции (см. рис.)



Примеры для самостоятельного решения

Исследовать и построить графики функций:

1. $y = \frac{x^2+1}{x}$
2. $y = \frac{x^2-3}{x+2}$
3. $y = x^2e^x$

Контроль знаний обучающихся:

- проверить решение дополнительных примеров;

Требования к оформлению самостоятельной работы:

Задание должно быть выполнено в тетради для самостоятельных работ

Тема 3. «Интегральное исчисление».
Самостоятельная работа:

Цель:

- познакомиться с понятием интеграла
- познакомиться с разными методами вычисления интеграла
- научиться вычислять площадь криволинейной трапеции с помощью интеграла

Порядок выполнения внеаудиторной самостоятельной работы:

1. Самостоятельная работа по подготовке к практическим занятиям. Составление таблицы интегралов
2. Самостоятельная работа с конспектом лекций. Рассмотрение примеров на вычисление площади криволинейной трапеции

Тема «Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование»

Функция F(x) называется первообразной для функции f(x), если F '(x) = f(x).

Любая непрерывная функция f(x) имеет бесконечное множество первообразных, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

Общее выражение F(x) +C совокупности всех первообразных для функции f(x) называется ***неопределенным интегралом*** от этой функции:

$\int f(x)dx = F(x) + C$, если $d(F(x) + C) = \int f(x)dx$

Основные свойства неопределенного интеграла

1^0.Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции и дифференциал от него равен подынтегральному выражению:

$(\int f(x)dx)' = f(x)$; $d(\int f(x)dx) = f(x)\,dx$

2^0. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int df(x) = f(x) + C$$

3^0. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла.

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

4^0.Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых функций:

$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)dx$

5^0. Если а – постоянная, то справедлива формула

$$\int dx = \int d(x+a), \int dx = \frac{1}{a}\int d(ax)$$

Основные формулы интегрирования (табличные интегралы)

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$
10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$

При применении формул (3), (10). (11) знак абсолютной величины пишется только в тех случаях, когда выражение, стоящее под знаком логарифма, может иметь отрицательное значение.

Каждую из формул легко проверить. В результате дифференцирования правой части получается подынтегральное выражение.

Непосредственное интегрирование.

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов. Здесь могут представиться следующие случаи:

1) данный интеграл находится непосредственно по соответствующему табличному интегралу;

2) данный интеграл после применения свойств 3^0 и 4^0 приводится к одному или нескольким табличным интегралам;

3) данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией и применения свойств 3^0 и 4^0 приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Примеры.

1. $\int 5dx$

Решение. На основании свойства 3^0 постоянный множитель 5 выносится за знак интеграла и, используя формулу 1, получим

$\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$

2. $\int 6x^2dx$

Решение. Используя свойство 3^0 и формулу 2, получим

$\int 6x^2dx = 6\int x^2dx = 6 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = 2x^3 + C$

3. $\int 4(x^2 - x + 3)\, dx$

Решение. Используя свойства 3^0 и 4^0 и формулы 1 и 2, имеем

$\int 4(x^2 - x + 3)\, dx = 4\int x^2dx - 4\int x\, dx + 12\int dx = 4 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 12x + C = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + C$

Постоянная интегрирования С равна алгебраической сумме трех постоянных интегрирования, так как каждый интеграл имеет свою произвольную постоянную ($C_1 - C_2 + C_3 = C$)

4. $\int (1 - 6^x)^2dx$

Решение. Возводя в квадрат и интегрируя каждое слагаемое, имеем

$\int (1 - 6^x)^2dx = \int (1 - 2 \cdot 6^x + 36^x)dx = x - \frac{2}{\ln 6} \cdot 6^x + \frac{36^x}{2\ln 6} + C$

5. $\int ctg^2x dx$

Используя тригонометрическую формулу $1 + ctg^2x = \frac{1}{\sin^2 x}$, находим

$\int ctg^2x dx = \int (\frac{1}{\sin^2 x} - 1)dx = -ctgx - x + C$

6. $\int \frac{x^2}{9 - x^2}dx$

Решение. Вычитая и прибавляя в числителе подынтегральной функции число 9, получим

$\int \frac{x^2}{9 - x^2}dx = \int \frac{x^2 - 9 + 9}{9 - x^2}dx = \int (-1 + \frac{9}{9 - x^2})dx = -\int dx + 9\int \frac{dx}{9 - x^2} =$

$= -x + 9 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + C = -x + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + C$

Примеры для самостоятельного решения

Вычислите интегралы, используя непосредственное интегрирование:

1. $\int 2(3x - 1)^2dx$
2. $\int \frac{dx}{x^4}$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$
4. $\int \frac{5dx}{x}$
5. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2}}$
6. $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$

8. $\int \frac{dx}{7\sin^2 x}$

9. $\int \frac{32^x - 2^x}{4^x} dx$

Тема «Неопределенный интеграл. Метод замены переменной»

В основе интегрирования методом замены переменной лежит свойство инвариантности формул интегрирования, которое заключается в следующем: если $\int f(x)dx = F(x) + C$,

то $$\int f(u)dx = F(u) + C,$$

где u(x) – произвольная дифференцируемая функция от x.

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок следующих двух типов:

1) x = φ (t), где t – новая переменная, а φ (t) – непрерывно дифференцируемая функция. В этом случае формула замены переменной такова:

$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$(1)

Функцию φ(t) стараются выбирать таким образом, чтобы правая часть формулы (1) приобрела более удобный для интегрирования вид;

2) t = μ(x), где t – новая переменная. В этом случае формула замены переменной имеет вид: $\int f(\mu(x))\mu'(x)dx = \int f(t)dt$

Примеры.

1. $\int \sin 3x dx$

Решение. Данный интеграл окажется табличным, если под знаком дифференциала будет находиться аргумент 3x подынтегральной функции sin3x. Так как d(3x) = 3dx, то

$\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x d(3x)$

Следовательно, подстановка 3x = t приводит рассматриваемый интеграл к табличному: $\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x d(3x) = \frac{1}{3}\int \sin t dt = -\frac{1}{3}\cos t + C$

Возвращаясь к старой переменной x, окончательно получим

$\int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$

2. $\int \frac{x^2 dx}{8+x^3}$

Решение. Так как $d(8+x^3) = 3x^2dx$, то $\int \frac{x^2dx}{8+x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{d(8+x^3)}{8+x^3}$

Полагая $8+x^3 = t$, получим

$\int \frac{x^2dx}{8+x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln|8+x^3| + C.$

3. $\int \frac{\cos x\, dx}{4+\sin^2 x}$

Решение. Поскольку d(sinx) = cosx, имеем

$$\int \frac{\cos x\, dx}{4+\sin^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{4+\sin^2 x}$$

Поэтому, используя подстановку t = sinx, приходим к табличному интегралу:

$\int \frac{\cos x\, dx}{4+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}arctg\frac{\sin x}{2} + C$

4. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}$

Из соотношения $d(e^x) = e^x dx$ получаем

$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}} = \int \frac{d(e^x)}{\sqrt{9-e^{2x}}}$

Воспользовавшись подстановкой $t = e^x$, приходим к табличному интегралу:

$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-(e^x)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{e^x}{3} + C$

5. $\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

Решение. Здесь используем подстановку $\sqrt[3]{x} = t$. Отсюда $x = t^3$, $dx = 3t^2dt$ и, следовательно по формуле (1) находим

$\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{\cos}{t^2}\, 3t^2 dt = 3\int \cos t\, dt = 3\sin t + C$

Возвращаясь к старой переменной х, получим

$\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 3\sin\sqrt[3]{x} + C$

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

Применим подстановку $x = \frac{1}{t}$. Тогда $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $\sqrt{1+x^2} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$, $t = \frac{1}{x}$

По формуле (1) находим

$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\int \frac{tdt}{t^2\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| + C$

Возвращаясь к старой переменной х, получим

$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}^2}\right| + C = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right| + C = -\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right| + x$

Примеры для самостоятельного решения

Вычислите интегралы, используя метод замены переменной:

1. $\int e^{2x^2} x\, dx$
2. $\int tgx dx$
3. $\int x\sin x^2\, dx$
4. $\int (2x^3+1)^4 x^2\, dx$
5. $\int \frac{\cos x dx}{3\sin x - 1}$
6. $\int \sqrt{4x^3+2}\, x^2 dx$
7. $\int \frac{dx}{sin^2(3x-2)}$
8. $\int \frac{dx}{5-2x}$
9. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}} dx$

Тема «Неопределенный интеграл. Интегрирование по частям».

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле $\int udv = uv - \int vdu$, (1)

где u и v - непрерывно дифференцируемые функции от x. С помощью формулы (1) отыскание интеграла $\int udv$ сводится к нахождению другого интеграла $\int vdu$, её применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен.

При этом в качестве u берется функция, которая при дифференцировании упрощается, а в качестве dv - та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Примеры.

1. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

Решение. Положим $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{x^3}$, откуда

$du = \frac{dx}{x}$, $v = \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}$

Тогда по формуле (1) находим

$\int \frac{\ln x}{x^3} dx = \ln x(-\frac{1}{2x^2}) - \int(-\frac{1}{2x^2})\frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$

2. $\int (x-5)\cos x\, dx$

Решение. Полагая $u = x - 5$, $dv = \cos x\, dx$, найдем $du = dx$,

$v = \int \cos x\, dx = \sin x$.

Следовательно,

$\int (x-5)\cos x\, dx = (x-5)\sin x - \int \sin x\, dx = (x-5)\sin x + \cos x + C.$

3. $\int x^2 e^{4x}dx$

Решение. Пусть $u = x^2$, $e^{4x}dx = dv$; тогда $du = 2x\,dx$, $v = \int e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x}$

По формуле (1) находим

$\int x^2 e^{4x}dx = \frac{1}{4}x^2e^{4x} - \frac{1}{2}\int x \ \ e^{4x}dx$ (∗)

К последнему интегралу снова применим формулу интегрирования по частям.

Положим $u = x$, $e^{4x}dx = dv$; откуда $du = dx$, $v = \int e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x}$ и, следовательно, $\int x \ \ e^{4x}dx = \frac{1}{4}x \ \ e^{4x} - \frac{1}{4}\int e^{4x}dx = \frac{1}{4}x \ \ e^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x}$

Подставляя найденное выражение в соотношение (∗), получим

$\int x^2e^{4x}dx = \frac{1}{4}x^2e^{4x} - \frac{1}{2}(\frac{1}{4}x \ \ e^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x}) + C = \frac{e^{4x}}{32}(8x^2 - 4x + 1) + C$

4. $\int x \operatorname{arctg}x\,dx$

Положим $u = \operatorname{arctg}x$, $dv = xdx$, откуда $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = \frac{1}{2}x^2$.

Используя формулу (1), находим

$\int x \operatorname{arctg}x\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x - \int\frac{x^2}{2}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx =$

$\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}(\int dx - \int\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}(x^2\operatorname{arctg}x - x + \operatorname{arctg}x) + C$

5. $\int e^{-x}\sin x\,dx$

Решение. Пусть $u = e^{-x}$, $\sin x\,dx = dv$; тогда $du = -e^{-x}dx$, $v = -\cos x$.

Согласно формуле (1) имеем

$I = \int e^{-x}\sin x\,dx = = -e^{-x}(\cos x) - \int e^{-x}\cos x dx.$ (∗)

К последнему интегралу снова применяем интегрирование по частям. Полагая $u = e^{-x}$, $\cos x dx = dv$, находим $du = -e^{-x}dx$, $v = \sin x$и, следовательно, $\int e^{-x}\cos x dx = \int e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x\,dx$

Подставляя полученное выражение в соотношение (∗), приходим к уравнению с неизвестным интегралом I:

$I = = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x – I,$

Из которого находим

$I = -\frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \sin x) + C$

Примеры для самостоятельного решения

Вычислите интегралы, используя метод интегрирования по частям:

1. $\int x\sin x dx$
2. $\int x\cos x dx$
3. $\int\frac{\ln x dx}{x^2}$
4. $\int\frac{xdx}{\sin^2 x}$
5. $\int xe^x dx$
6. $\int \arcsin x dx$
7. $\int \operatorname{arctg} x dx$

Тема «Определенный интеграл и его непосредственное вычисление».

Пусть функция f(x) определена на отрезке [a, b]. Разобьем отрезок [a, b] на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ произвольную точку ε_kи обозначим через Δx_k длину каждого такого отрезка. ***Интегральной суммой*** для функции f(x) на отрезке [a, b] называется сумма вида

$\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\,\Delta x_k = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n.$ (1)

Определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a, b] называется предел интегральной суммы (1) при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\Delta x_k \to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\,\Delta x_k$(2)

Если функция f(x) непрерывна на [a, b], то предел (2) существует и не зависит от способа разбиения отрезка [a, b] на элементарные отрезки и от выбора точекε_k (теорема существования определенного интеграла)

Основные свойства определенного интеграла.

1^0. *Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций:*

$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$

2^0. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:*

$\int_a^b k f(x)dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

3^0. *При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:*

$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)dx$

4^0. *Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:*

$\int_a^a f(x)dx = 0$

5^0. *Для определенного интеграла с симметричными пределами интегрирования имеют место следующие равенства:*

$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)dx$, если $f(x)$- четная функция

0, если $f(x)$ - нечетная функция

6^0. *Для любых трех точек, принадлежащих области существования определенного интеграла, справедлива формула:*

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Для вычисления определенного интеграла от функции f(x) в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл, служит **формула Ньютона – Лейбница**

$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(a) – F(b)$, (3)

т. е. определенный интеграл равен разности значений первообразных при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Примеры.

1. Вычислить интеграл: $\int_1^2 5x^4dx$

Решение. Найдем одну из первообразных F(x) для функции $5x^4$. Так как

$\int 5x^4dx = 5\cdot\frac{x^5}{5} + C = x^5 + C$, то $F(x) = x^5$.

Следовательно, по формуле Ньютона – Лейбница получаем

$\int_1^2 5x^4dx = x^5\Big|_1^2 = 2^5 - 1^5 = 32 – 1 = 31$

2. Вычислить интеграл: $\int_0^4 (3x - e^{\frac{x}{4}})dx$

Решение. Согласно формуле (3) находим

$\int_0^4 (3x - e^{\frac{x}{4}})dx = [\frac{3x^2}{2} - 4e^{\frac{x}{4}}]_0^4 = (24 – 4e) – (0 - 4) = 28 – 4e$

3. Вычислить интеграл: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2x}$

Решение. Согласно формуле (3) находим

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2x}$ - $-ctgx\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -(ctg\frac{\pi}{3} - ctg\frac{\pi}{4}) = -(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1) = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

4. Вычислить интеграл: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

Решение. Согласно формуле (3) находим

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^1 = arctg\ 1 – arctg\ 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

5. Вычислить интеграл:

Решение. По формуле Ньютона – Лейбница имеем

$\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^e = \ln e – \ln 1 = 1 – 0 = 1$

Задание 2.

Вычислить определенные интегралы, пользуясь формулой Ньютона – Лейбница:

1. $\int_{-5}^{6} 2dx$

2. $\int_{1}^{3} x^2 dx$

3. $\int_{-1}^{0} (x^3 + 2x)dx$

4. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^3}$

5. $\int_{1}^{2} (2x^3 + 4x - 2)dx$

6. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$

7. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

8. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$

9. $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{12}} \sin 2x dx$

10. $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^2 2x}$

11. $\int_{-\frac{1}{3}}^{1} (3x + 1)^2 dx$

12. $\int_{2}^{8} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Контроль знаний обучающихся:

- проверить решение дополнительных примеров;

Требования к оформлению самостоятельной работы:

Задание должно быть выполнено в тетради для самостоятельных работ

Тема 4. «Элементы линейной алгебры».

Самостоятельная работа:

Цель:

- познакомиться с понятием определителя второго и третьего порядков
- познакомиться с формулами Крамера для решения систем линейных уравнений
- научиться применять формулы Крамера для решения систем линейных уравнений второго и третьего порядков

Порядок выполнения внеаудиторной самостоятельной работы:

1. Самостоятельная работа по подготовке к практическим занятиям. Рассмотрение примеров на применение различных методов решения СЛУ

2. Самостоятельная работа с конспектом лекций. Составление систем четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными для решения методом Жордано – Гаусса

Тема «Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера»

Определители второго и третьего порядков. *Определителем второго порядка* называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} называются элементами определителя; при этом элементы a_{11} и a_{22} образуют *главную диагональ,* а элементы a_{12} и a_{21}-*побочную диагональ.* Таким образом, определитель второго порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

Определителем третьего порядка называется число, определяемое

Равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Таким образом, каждый член определителя третьего порядка представляет собой произведение трех его элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Эти произведения берутся с определенными знаками: со знаком «плюс» - три члена, состоящие из элементов главной диагонали и из элементов, расположенных в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком «минус» - три члена, расположенные аналогичным образом относительно побочной диагонали.

Алгоритм решения систем линейных уравнений по формулам Крамера.

Габриель Крамер (1704–1752) швейцарский математик.

Данный метод применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, то есть ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных. Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0, $det\ A \neq 0$.

Действительно, если какое-либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой-либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое-либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Система из двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

решается с помощью формул Крамера:

$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$,

где $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ и $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

При решении системы возможны три случая:

1. Определитель системы $\Delta \neq 0$. Тогда система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера.

2. Определитель системы $\Delta = 0$. Если при этом хотя бы один из определителей Δ_{x_1} и Δ_{x_2} не равен нулю, то система не имеет решений.

3. Если $\Delta = 0$, $\Delta_{x_1} = 0$ и $\Delta_{x_2} = 0$, то одно из уравнений есть следствие другого, система сводится к одному уравнению с двумя неизвестными и имеет бесчисленное множество решений.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13 \\ 2x_1 + 7x_2 = 81 \end{cases}$.

Решение. Вычислим определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 31 \neq 0$, и дополнительные определители $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 13 & -5 \\ 81 & 7 \end{vmatrix} = 496$, $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & 81 \end{vmatrix} = 217$

Система имеет единственное решение

$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{496}{31} = 16$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{217}{31} = 7$

Ответ: $(16,7)$.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 = 8 \end{cases}$.

Решение. Вычислим определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$, и дополнительные определители $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 48 = 44 \neq 0$, $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 2 = 22 \neq 0$. Коэффициенты уравнений системы пропорциональны, а свободные члены не подчинены той же пропорции. Система не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 \\ 3x_1 - 9x_2 = 3 \end{cases}$

Решение. Вычислим определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$, и дополнительные определители $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$.

Так как $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = 0$, то одно уравнение есть следствие другого (второе уравнение получено из первого умножением на 3).

Система сводится к одному уравнению и имеет бесчисленное множество решений, каждое из которых вычисляется по формуле: $x_1 = 1 + 3x_2$, где числовые значения x_2 задаются произвольно и вычисляются соответствующие значения x_1.

Ответ: $x_1 = 1 + 3x_2$ – общее решение данной системы, а решения $x_2 = 1, x_1 = 4$ – частные.

Система из двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$$

Из основной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ при помощи поочередного вычеркивания столбцов получаем определители

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Дополнительные определители $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{13} & b_1 \\ a_{23} & b_2 \end{vmatrix}$.

Возможны три случая:

1. Если из трех определителей

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

хотя бы один не равен нулю, то система имеет бесчисленное множество решений, причем одному неизвестному можно дать любое значение. Пусть, например, отличен от нуля Δ_3, тогда неизвестному x_3 можно придать любое значение (если $\Delta_1 \neq 0$, то x_1, если $\Delta_2 \neq 0$, то x_2), а исходную систему переписать в виде, $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 - a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 - a_{23}x_3 \end{cases}$. Отсюда неизвестные x_1 и x_2 определяются по формулам Крамера.

2. Все определители $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, но один из определителей, $\begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{13} & b_1 \\ a_{23} & b_2 \end{vmatrix}$ не равен нулю. В этом случае система несовместна, то есть не имеет решений.

3. Все выписанные определители равны нулю. Система имеет бесчисленное множество решений.

Пример 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2{,}5 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$

Решение. Основная матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Вычислим определители $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$, $\Delta_3 = 0\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} == 4 \neq 0$, система имеет бесчисленное множество решений.

Любое значение можно придать одному из неизвестных x_2 или x_3, так как $\Delta_2 \neq 0$ и $\Delta_3 \neq 0$. Неизвестному x_1 придать любое значение нельзя, так как $\Delta_1 = 0$.

Решим систему относительно x_1 и x_2 $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2{,}5 - 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 + 4x_3 \end{cases}$. Вычислим определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Вычислим

$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2{,}5 - 2x_3 & -1 \\ 1 + 4x_3 & 2 \end{vmatrix} = 1{,}5$ и $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 2{,}5 - 2x_3 \\ 2 & 1 + 4x_3 \end{vmatrix} = 2x_3 - 1$

Ответ: $x_1 = 1{,}5$, $x_2 = 2x_3 - 1$, $x_3 \in R$ – общее решение системы.

Система из трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

При решении системы из трех уравнений с тремя неизвестными возможны три случая:

1. Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$. Система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$,

$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$, где $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ и $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

2. Определитель системы равен нулю, $\Delta = 0$. Если при этом хотя бы один из определителей Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3}, не равен нулю, то система несовместна, решений не имеет.

3. Если $\Delta = 0$ и $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$, то система имеет бесчисленное множество решений.

Пример 4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$

Решение. Вычислим определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33$ и дополнительные определители

$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33$ и $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 33$, $\Delta_{x_3} = 33$.

По формулам Крамера имеем, что $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Ответ: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Задание . Решите системы линейных уравнений по формулам Крамера.

Примеры для самостоятельного решения.

1. $\begin{cases} 5x = 2y == 11 \\ 4x - y = 14 \end{cases}$

2. $\left\{\begin{matrix} 3x + 4y + 2z = 8 \\ x + 5y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \end{matrix}\right\}$

3. $\left\{\begin{matrix} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x + y + z = 8 \end{matrix}\right\}$

Контроль знаний обучающихся:

- проверить практическую работу;

Матричный метод решения систем линейных уравнений

Введем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и матрицы $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$. Пусть $\det A \neq 0$.

Представим систему (1.10) в виде матричного уравнения AX=B. Это легко проверить, перемножив матрицы A и X.

Действительно,

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = B.$$

Решим теперь матричное уравнение $A \cdot X = B$. Умножим обе части уравнения на матрицу A^{-1} слева. Тогда $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, а так как

$A^{-1} \cdot A = E$, то имеем $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$ и, наконец,

$X = A^{-1} \cdot B$ (1.12)

Пример. Матричным методом решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - 2z = 6, \\ 2x + 3y - 7z = 16, \\ 5x + 2y + z = 16. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель матрицы A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

то есть матрица A невырожденная. Построим обратную матрицу A^{-1}. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 17, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -37, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -11, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

Следовательно,

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}17 & -5 & -1\\ -37 & 11 & 3\\ -11 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Находим теперь решение системы по формуле (1.12).

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}17 & -5 & -1\\ -37 & 11 & 3\\ -11 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\16\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & -5 & -1\\ -37 & 11 & 3\\ -11 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\8\\8\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}17\cdot 3-5\cdot 8-1\cdot 8\\ -37\cdot 3+11\cdot 8+3\cdot 8\\ -11\cdot 3+3\cdot 8+1\cdot 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix},$$ то есть

$x = 3, y = 1, z = -1$.

- **Примеры для самостоятельного решения**

- *Задание 2.*
- Представить систему уравнений в виде одного матричного уравнения и найти её решение с помощью обратной матрицы
- а) $\begin{Bmatrix} x-2y=3\\ -2x+3y=-7\end{Bmatrix}$
- б) $\begin{Bmatrix} x-2y-3z=-4\\ 4x+y+2z=13\\ 2x+5y+z=-7\end{Bmatrix}$
- в) $\begin{Bmatrix} 3x+y+5z=0\\ 2x+3y+3z=3\\ 2x+y+4z=-1\end{Bmatrix}$

Контроль знаний обучающихся:

- проверить решение дополнительных примеров;

Требования к оформлению самостоятельной работы:

Задание должно быть выполнено в тетради для самостоятельных работ

Тема 5. «Основы теории комплексных чисел».

Самостоятельная работа:

Цель:

- ознакомиться с понятием комплексного числа, геометрической интерпретацией комплексного числа, заданного в алгебраической форме

- научиться осуществлять действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

Порядок выполнения внеаудиторной самостоятельной работы:

1. Самостоятельная работа по подготовке к практическим занятиям. Решение примеров на тему «Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме»

2. Самостоятельная работа с конспектом лекций. Рассмотрение правил действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической и показательной формах»

3. Самостоятельная работа по подготовке к дифференцированному зачету

Комплексные числа.

Определение. Комплексным числом *z* называется ***упорядоченная пара чисел (a,b),*** *над множеством которых по определенным правилам можно производить следующие операции: сложение , умножение, деление, возведение в степень результаты которых также являются комплексными числами.*

Определение. Алгебраической формой компле5ксного числа*z*называется выражение $z=a+ib$, где *a*и *b* – действительные числа, *i* – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$i^2=-1; \qquad i=\sqrt{-1}.$

При этом число *a* называется **действительной частью** числа *z* (*a* = *Rez*), а *b*- **мнимой частью** (*b* = *Imz*).

Если *a* =*Rez* =*0,* то число *z* будет чисто мнимым, если *b* = *Imz* = *0*, то число *z* будет действительным.

<u>Определение.</u> Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются **комплексно – сопряженными.**

<u>Определение.</u> Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

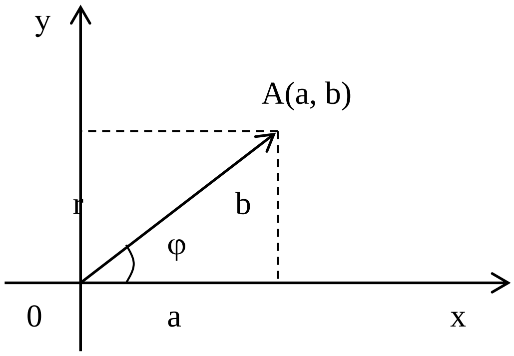
$a_1 = a_2$; $b_1 = b_2$;

<u>Определение.</u> Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$a = b = 0.$

Понятие комплексного числа имеет **геометрическое истолкование**. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, (комплексной плоскости z) координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.



Таким образом, на оси OX располагаются действительные числа *a*, а на оси OY – чисто мнимые-*b*.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой **тригонометрической форме.**

<u>Тригонометрическая форма числа.</u>

Из геометрических соображений видно, что $a = r\cos\varphi$; $b = r\sin\varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой записи комплексного числа.**

При этом величина *r* называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона φ - **аргументом** комплексного числа.

$r = |z|$; $\varphi = Arg\, z$.

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2};\quad \varphi = Arg\, z = arctg\frac{b}{a};$$

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$|z| = |\bar{z}|$; $Arg\, z = -Arg\, \bar{z}$.

<u>Действия с комплексными числами</u>.

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1) **Сложение и вычитание.**

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}$$

2) **Умножение.**

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

С случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

3) **Деление.**

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме

Алгебраической формой комплексного числа $z = (a,b)$.называется алгебраическое выражение вида

$z = a + bi$.

Арифметические операции над комплексными числами $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, записанными в алгебраической форме, осуществляются следующим образом.

1. Сумма (разность) комплексных чисел

$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) \cdot i$,

т.е. сложение (вычитание) осуществляются по правилу сложения многочленов с приведением подобных членов.

2. Произведение комплексных чисел

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot i$,

т.е. умножение производится по обычному правилу умножения многочленов, с учетом того, что $i^2 = 1$.

3. Деление двух комплексных чисел осуществляется по следующему правилу:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)}{(a_2 + b_2 i)} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a^2 + b^2} = \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + (b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2) \cdot i}{a^2 + b^2}, \ (z_2 \neq 0),$$

т.е. деление осуществляется умножением делимого и делителя на число, сопряженное делителю.

Возведение в степень комплексных чисел определяется следующим образом:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \ldots z}_{n \text{ раз}}.$$

Легко показать, что

$z^n z^m = z^{n+m}$,

$(z^n)^m = z^{nm}$,

$(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n$.

Примеры.

1. Найти сумму комплексных чисел $z_1 = 2 - i$и $z_2 = -4 + 3i$.

$z_1 + z_2 = (2 + (-1)\cdot i) + (-4 + 3i) = (2 + (-4)) + ((-1) + 3)\, i = -2+2i$.

2. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -4 + 5i$.

$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (-4 + 5i) = 2 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-3i) + 2\cdot 5i - 3i\cdot 5i = 7+22i$.

3. Найти частное z от деления $z_1 = 3 - 2$на $z_2 = 3 - i$.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(3-2i)}{(3-i)} = \frac{(3-2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{11-3i}{9+1} = \frac{11}{10} - \frac{3}{10} i .$$

4. Решить уравнение: $3x - (1-i)(x - yi) = 2 + 3i$, x и $y \in \mathbf{R}$.

$3x - ((x-y) + (-x-y)i) = 2 + 3i$

$(2x + y) + (x + y)i = 2 + 3i$.

В силу равенства комплексных чисел имеем:

$$\begin{cases} 2x + y = 2, \\ x + y = 3, \end{cases}$$

откуда$x = -1$, $y = 4$.

5. Вычислить: i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^{-1} , i^{-2}.

$i^2 = i \cdot i = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$

$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -(-1) = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1$

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = -i$$

$$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = -1.$$

6. Вычислить z^{-3}, если $z = 1 - i$.

$$z^{-3} = (1-i)^{-3} = \frac{1}{(1-i)^3} = \frac{1}{1 - 3i + 3i^2 - i^3} = \frac{1}{-2-2i} = \frac{-2+2i}{(-2)^2 + (-2)^2} =$$

$$= \frac{-2+2i}{8} = -0.25 + 0.25i .$$

7. Вычислить число z^{-1} обратное числу z=3-i.

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{3-i} = \frac{3+i}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i}{3^2+1^2} = \frac{3+i}{10} = 0.3 + 0.1i .$$

Задание 2. Решить примеры для самостоятельного решения

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить:

1) $(3 - 2i) + (5 + 3i)$;
2) $(1 + 2i) - (3 - i)$;
3) $3(2 - i)\cdot(1 - i)$;
4) $(1 + 3i)(-7 + 2i)$;
5) $(2 - i)^2$;
6) $(1 + 2i)^3$.

2. Найти решение уравнений ($x, y \in \mathbf{R}$):

1) $(1 + i)x + (2 + i)y = 5 + 3i$;
2) $2x + (1 + i)(x + y)=7 +i$;
3) $(3 – y + x)(1 + i) + (x – y)(2 + i) = 6 – 3i$.
3. Вычислить:

1) i^{13}; 2) i^{65}; 3) $\left(\frac{1}{1-i}\right)^2$;

4) $\frac{5}{1+2i}$; 5) $\frac{2i-3}{1+i}$; 6) $\frac{2+3i}{i}$;

7) $\frac{1+2i}{-2+i}(-i)+1$; 8) $\frac{2+i}{2-i}-(3+4i)+\frac{4-i}{3+2i}$; 9) $(2-i)^2$.

4. Найти z^{-1}, если:
1) $z = 7 – 12i$; 2) $z = 3 + 4i$; 3) $z = –3 + 7i$; 4) $z = i$.
5. Вычислить:

1) $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^3(1 – \mathrm{i})^7$; 2) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-12}$; 3) $\frac{(1+i)^8}{(-1+i)^4}$.

6. Доказать, что $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$; $\overline{-z_1} = -\overline{z_1}$.

7. Доказать, что если $z = a + bi$, то $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2}$.

8. Построить точки, соответствующие комплексным числам:
-1; i; $-\sqrt{2}$; $-3i$; $2 - 3i$; $-4-2i$; $3+i$; $-6 + 2i$; $2 + 2i$; $-2 + 2i$; $-2 - 2i$.

9. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел, изобразить геометрически данные числа и результаты действий.

1) $z_1 = -2 + i, \quad z_2 = 3 - i$; 2) $z_1 = -3, \quad z_2 = 4i$.

10. Изобразить геометрическое множество всех комплексных чисел $z = x + yi$, для которых:

1) $x = 2$; 2) $1 \le x \le 3$; 3) $\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im} z$; 4) $\mathrm{Im} z = 2\mathrm{Re}\, z$.

11. Найти модуль и аргумент следующих комплексных чисел и представить их на комплексной плоскости:

1) $z =1 + i$; 2) $z = \sqrt{3} - i$; 3) $z = \sqrt{2}i$; 4) $z = 2$; 5) $z = -i$.

12. Указать на комплексной плоскости множества точек, соответствующие комплексным числам z, удовлетворяющие условиям:

1) $|z| = 1$; 2) $|z| \le 5$; 3) $1 \le |z| \le 2$; 4) $\arg z = 0$;

5) $\frac{\pi}{6} \le \arg z \le \frac{\pi}{4}$; 6) $|z-1| = \frac{1}{3}$; 7) $|z - 3 + 2i| \le 2$.

Контроль знаний обучающихся:

- проверить решение дополнительных примеров;

Требования к оформлению самостоятельной работы:

Задание должно быть выполнено в тетради для самостоятельных работ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: учебное пособие для средних спец. учеб.заведений, М.: Высшая школа, 2018
2. Калинина В. Н., Панкин В. Ф. Математическая статистика: Учебник для студентов средних специальных учебных заведений. М.: Высшая школа, 2019.
3. В.Е.Гмурман Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической М.: Высшая школа, 2019.
4. Бабенко К. И. Основы численного анализа. — М.: Наука, 2018
5. Воеводин В. В. Математические основы параллельных вычислений. — М.: Изд-во МГУ, 2019.
6. Бахвалов Н. С. Численные методы. 3-е изд. — М, 2018.
7. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближённые методы высшего анализа. — М.—Л.: ГИИТЛ, 2019.