Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Добрянский гуманитарно-технологический техникум им. П.И. Сюзева»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ЕН 01. «МАТЕМАТИКА»

для специальности

46.02.01 «Документационное обеспечение управления и архивоведение»

Добрянка, 2021

Рассмотрено на заседании П(Ц)К общеобразовательных, гуманитарных и естественнонаучных дисциплин «14» 05 2021 г. Председатель П(Ц)К общеобразовательных, гуманитарных и естественнонаучных дисциплин __________ Г.П. Трушникова	ОДОБРЕНО методическим советом ГБПОУ ДГТТ им. П.И. Сюзева Протокол № 5 от «14» 05 2021г. Заведующий структурного подразделения __________ М.К. Рябкова

Составитель: Трушникова Галина Петровна, преподаватель ГБПОУ «Добрянский гуманитарно-технологический техникум им. П.И. Сюзева»

Рецензенты:

Внешние:

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации к выполнению практических работ по дисциплине ЕН.01 «Математика» предназначены для закрепления теоретических знаний, полученных на лекциях, а также для применения этих знаний при выполнении практических работ.

Перечень практических работ соответствует рабочей программе по дисциплине ЕН.01 «Математика»

Выполнение студентами практических работ по дисциплине проводится с целью:

- закрепления полученных теоретических знаний по дисциплине;
- углубления теоретических знаний в соответствии с заданной темой;
- формирования умений решать практические задачи;
- развития самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования активных умственных действий студентов, связанных с поисками рациональных способов выполнения заданий;
- подготовки к экзамену.

Методические рекомендации выполняют функцию управления самостоятельной работой студента, поэтому каждое занятие имеет унифицированную структуру, включающую определение целей занятия, оснащения занятия, порядок выполнения работы, а также задания и контрольные вопросы для закрепления темы.

При выполнении практических работ основным методом обучения является самостоятельная работа студентов под руководством преподавателя.

Студенты на практических занятиях в зависимости от формы и сложности заданий работают: индивидуально; в парах; в группах; всей группой

По окончании работы студенты самостоятельно или с помощью преподавателя осуществляют взаимоконтроль, обсуждают результаты и подводят итоги работы.

Оценка преподавателем выполненной студентом работы осуществляется комплексно:

- по результатам выполнения заданий;
- по устной работе;
- оформлению работы.

Указания к выполнению практических работ

1. Практические работы нужно выполнять в отдельной тетради в клетку. Необходимо оставлять поля шириной 5 клеточек для замечаний преподавателя.
2. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.
3. Оформление решения задачи следует завершать словом «Ответ».
4. После получения проверенной преподавателем работы студент должен в этой же тетради исправить все отмеченные ошибки и недочеты. Вносить исправления в сам текст работы после ее проверки запрещается.
5. Оценивание индивидуальных образовательных достижений по результатам выполнения практических работ производится в соответствии с универсальной шкалой (таблица).

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Организация выполнения и контроля практических работ по дисциплине ЕН.01 «Математика» является подготовительным этапом к сдаче дифференцированного зачета по данной дисциплине.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА№ 1

Тема: ***Предел функции в точке. Раскрытие неопределенностей***

Цели:

- ознакомиться с понятием предела числовой последовательности;
- ознакомиться с понятием предела функции;
- научиться раскрывать неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов.

Оснащение занятия: конспект лекций.

<u>Критерии оценок</u>

оценка «5» ставится за верное выполнение всех заданий работы

оценка «4» ставится за верное выполнение любых девяти заданий работы

оценка «3» ставится за выполнение любых семи заданий работы

Порядок выполнения работы

Задание 1.

1. Ознакомиться с лекциями 1,2,3.
2. Выписать в тетрадь теоремы о пределах
3. Записать в тетрадь решение примеров 1 – 6.

Лекция 1.

Тема «Числовые последовательности. Их роль в вычислительных процессах. Предел числовой последовательности»

Бесконечной числовой последовательностью называется числовая функция, определенная на множестве N натуральных чисел.

Последовательность (x_n) называется ***возрастающей (убывающей),*** если каждый её член, начиная со второго, больше (меньше) предыдущего, т. е. если для любого n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ $(x_{n+1} < x_n)$.

Последовательность (x_n) называется ***невозрастающей (неубывающей)***, если каждый её член, начиная со второго, не больше (не меньше) предыдущего, т. е. если для любого n выполняется неравенство $x_{n+1} \leq x_n$ $(x_{n+1} \geq x_n)$.

Убывающие, возрастающие, неубывающие и невозрастающие последовательности называются ***монотонными.***

Последовательность (x_n) называется ***ограниченной сверху (ограниченной снизу)***, если можно указать такое число M (число m), что для всех членов этой последовательности выполняется неравенство $x_n \leq M$
$(x_n \geq m)$. Числа Mи mназываются соответственно ***верхней*** и ***нижней границами*** последовательности (x_n). Тот факт, что последовательность ограничена сверху числомM (снизу числомm) , геометрически означает, что ни одна точкаx_n не лежит правее точкиM (левее точкиm).

Последовательность (x_n) называется ***ограниченной***, если существуют два числаm и M такие, что для всех nвыполняется неравенство $m \leq\ x_n \leq M$. Тот факт, что последовательность ограничена числамиm и M, геометрически означает, что все её члены помещаются в промежутке $[m;M]$.

Последовательность (x_n) называется ***постоянной***, если все её члены совпадают.

Обычно последовательность задаётся формулой, выражающей общий член последовательности через n. Иногда указывается правило, с помощью которого можно вычислить n-й член последовательности по её известным предыдущим членам. Такой способ задания последовательности называется ***индуктивным***(или ***реккурентным***).

Пример. Вычислить пять первых членов последовательности $x_n = \frac{n-1}{n+1}$

Подставив вместо n последовательно 1, 2, 3, 4, 5, получим

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = \frac{3}{5}\ , x_5 = \frac{2}{3}$$

Число a называется ***пределом последовательности*** $\boldsymbol{x_n}$, если для любого $\varepsilon > 0$ все члены последовательностиx_n, кроме, быть может, конечного их числа, лежат в ε- окрестности $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ точки a, т. е. найдется такое натуральное число N, что при $n>N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Последовательность может иметь только один предел. Если последовательность имеет предел, то такую последовательность называют ***сходящейся***; последовательность, не имеющую предела, называют ***расходящейся.***

Если последовательность (x_n) имеет пределом число a, то пишут $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \mathrm{a}$ В этом случае говорят, что последовательность сходится к числу a.

Последовательность называется ***бесконечно малой***, если её предел равен нулю.

Отметим свойства бесконечно малых последовательностей.

1^0**.** *Сумма двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой.*

2^0. *Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую является бесконечно малой.*

Следствие. Произведение двух бесконечно малых является бесконечно малой.

$3^{0.}$ Для того, чтобы выполнялось равенство $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, необходимо и достаточно, чтобы $x_n = a + \alpha_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

Последовательность называется ***бесконечно большой***, если для любого M>0 найдется такое натуральное число N, что при любых $n \geq N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| > M$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$ и все числа α_n, начиная с некоторого номера N, положительны, то последовательность (a_n) стремится к $+\infty$; если все числа α_n, начиная с некоторого номера N, отрицательны, то последовательность (a_n) стремится к $-\infty$;

Если (a_n) – бесконечно большая последовательность, то последовательность ($1/a_n$) – бесконечно малая. Наоборот, если (a_n) – бесконечно малая последовательность, то ($1/a_n$) – бесконечно большая.

Лекция 2.

Тема « Предел функции в точке. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Раскрытие неопределённостей»

Определение: Число А называется ***пределом функции*** y = f(x) при x, стремящемся к a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число
$\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $0 < |\mathrm{x} - \mathrm{a}| < \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство:
$|\mathrm{f(x)} - \mathrm{A}| < \varepsilon$. Это записывается так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Функция f(x) называется ***бесконечно малой*** при x→ a, если: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Функция f(x) называется ***бесконечно большой*** при x→ a, если: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ или, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Отметим свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.

1^0. Если функции f(x) и g(x) – бесконечно малые при x→ a, то их сумма
f(x) + g(x) при x→ a также является бесконечно малой.

2^0. Если функция f(x) – бесконечно малая при x→ a, а F(x) – ограниченная функция, то их произведение f(x) · F(x) – есть функция бесконечно малая.

Следствие. Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть величина бесконечно малая.

3^0. Если при x→ a функция f(x) имеет конечный предел
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, а функция g(x) – бесконечно большая, то
$\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \infty$, а $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

4^0. Если функция f(x) – бесконечно малая при x→ a, то функция 1/ f(x) – бесконечно большая, причем предполагается, что в окрестности точки a функция f(x) не обращается в нуль. Наоборот, если при x→ a функция g(x) – бесконечно большая, то функция 1/ g(x) – бесконечно малая.

Теоремы о пределах.

T₁: Если основная элементарная функция определена в предельной точке x=a, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

T₂: Если C – постоянная величина, то $\lim\limits_{x\to a} C = C$

Т3: Если С – постоянная величина, то $\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = C\lim\limits_{x\to a} f(x)$

Т4: Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то

1. $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \pm \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$(*предел суммы равен сумме пределов)*

2. $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$*предел произведения равен произведению пределов)*

3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0$ (*предел отношения равен отношению пределов)*

4. $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)^{f_2(x)} = \lim\limits_{x\to a} f_1(x)^{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$

Лекция 3.
Техника вычисления пределов

Примеры. *Вычислить пределы:*

1. $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3 - 6x^2 + x - 5)$

По правилу нахождения предела многочлена находим

$\lim\limits_{x\to 2}(5x^3 - 6x^2 + x - 5) = 5\cdot 2^3 - 6\cdot 2^2 + 2 - 5 = 13$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5}{4x-8}$

Здесь предел числителя равен нулю $\lim\limits_{x\to 2}(4x - 8) = 4\cdot 2 - 8 = 0$ Следовательно теорему о пределе частного применить нельзя. Так как

$\lim\limits_{x\to 2}(4x - 8) = 0$, то $4x - 8$ при $x\to 2$ есть величина бесконечно малая, а обратная ей величина $\frac{1}{4x-8}$ - бесконечно большая. Поэтому при $x\to 2$произведение $\frac{1}{4x-8}\cdot 5$ есть величина бесконечно большая, т. е. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5}{4x-8} = \infty$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2 - 2x}{2x^2 - 5x}$

Здесь пределы числителя и знаменателя при $x\to 0$ равны нулю. Непосредственной подстановкой вместо аргумента его предельного значения вычислить предел нельзя, так как при $x\to 0$ получается отношение двух бесконечно малых величин.

Разложим числитель и знаменатель на множители, чтобы сократить дробь на общий множитель, стремящийся к нулю, и, следовательно, сделать возможным применение теоремы 3.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2 - 2x}{2x^2 - 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(3x-2)}{x(2x-5)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-2}{2x-5} = \frac{3\cdot 0-2}{2\cdot 0-5} = \frac{2}{5}$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2 - 5x+6}{3x^2 - 9x}$

Пределы числителя и знаменателя при $x\to 3$ равны нулю:

$\lim\limits_{x\to 3}(x^2 - 5x + 6) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 3}(3x^2 - 9x) = 0$. Разложим квадратный трехчлен в числителе на линейные множители по формуле $ax^2+вx+c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 - корни трехчлена. Разложив на множители и знаменатель, сократим дробь на х-3. Получим

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2 - 5x+6}{3x^2 - 9x} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{3x(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{x-2}{3x} = \frac{3-2}{3\cdot 3} = \frac{1}{9}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$

Пределы числителя и знаменателя при $x\to 0$ равны нулю. Умножив числитель и знаменатель на сопряженный знаменателю множитель

$\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x}$ и затем сократив дробь на х, получим

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})}{(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x})(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x})}{-2x} =$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{5-x} + \sqrt{5+x}}{-2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{-2} = -\sqrt{5}$

6. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^4 - 2x^2 + 3}{3x^4 - 5}$

При $x \to \infty$ числитель и знаменатель – величины бесконечно большие. Поэтому при непосредственном применении теоремы 3 получаем выражение ∞/∞, которое представляет собой неопределенность Для вычисления предела этой функции нужно числитель и знаменатель разделить на наивысшую степень аргумента, т. е. на x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^2+3}{3x^4-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^4}}{3-\frac{5}{x^4}}=\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

Задание 2.

Раскрыть неопределенность $\frac{0}{0}$ и вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+5x-3}{\log_2(x^2+1)}$
2. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}$
3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$
4. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$
5. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$
6. $\lim\limits_{x\to1,5}\frac{2x^2-x-3}{2x^2-5x+3}$
7. $\lim\limits_{x\to-0,5}\frac{2x^2-7x-4}{-2x^2+5x+3}$
8. $\lim\limits_{x\to4}\frac{16-x^2}{x^3-64}$

Контроль знаний обучающихся:

- проверить практическую работу;
- устный опрос.

1. Какие теоремы о пределах вы знаете?
2. Как раскрывается неопределенность вида $\frac{0}{0}$?
3. Как раскрывается неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$?

Требования к оформлению практической работы:

Задание должно быть выполнено в тетради для практических работ

Работу сдать после занятия

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА№ 2

Тема: Техника вычисления пределов

Цели:

- научиться раскрывать неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов.

Оснащение занятия: конспект лекций.

<u>Критерии оценок</u>

оценка «5» ставится за верное выполнение всех заданий работы

оценка «4» ставится за верное выполнение любых десяти заданий работы

оценка «3» ставится за верное выполнение любых восьми заданий работы

Порядок выполнения работы

Задание 1.

Вычислить пределы, используя изученные теоремы о пределах.

1.. $\lim\limits_{x\to1,5}\frac{2x^2-x-3}{2x^2-5x+3}$

2. $\lim\limits_{x\to-0,5}\frac{2x^2-7x-4}{-2x^2+5x+3}$

3. $\lim\limits_{x\to4}\frac{16-x^2}{x^3-64}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{x+9}}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$
6. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}$
7. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}$
8. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x-1}$
9. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2-\sqrt{6+x}}{\sqrt{7-x}-3}$

Раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ и вычислить пределы:

10. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^3-2x^2+5}{6x^3+7x+3}$
11. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{4-x-5x^2}{6+3x+7x^2}$
12. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^3+5x^2-8}{6x^2-9x+1}$
13. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^3+2x^2-4}{3x^4-8x+1}$

Контроль знаний обучающихся:

- проверить практическую работу;

Требования к оформлению практической работы:

Задание должно быть выполнено в тетради для практических работ

Работу сдать после занятия

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА№ 3

Тема: Применение первого и второго замечательных пределов для раскрытия неопределенностей.

Цели:

- ознакомиться с формулой, выражающей первый замечательный предел;
- ознакомиться с формулой, выражающей второй замечательный предел;
- научиться применять первый и второй замечательные пределы для раскрытия неопределенностей

Оснащение занятия: конспект лекций.

Критерии оценок

оценка «5» ставится за верное выполнение всех заданий работы

оценка «4» ставится за верное выполнение любых двенадцати заданий работы

оценка «3» ставится за верное выполнение любых девяти заданий работы

Порядок выполнения работы

Задание 1.

1. Ознакомиться с лекцией 4
2. Выписать в тетрадь первый и второй замечательные пределы
3. Записать в тетрадь решение примеров 1 – 6.

Лекция 4.

Тема «Первый замечательный предел. Второй замечательный предел»

При вычислении пределов тригонометрических функций часто используется предел отношения синуса дуги к самой дуге:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

Эта формула носит название **первого замечательного предела**. Рассмотрим примеры на применение этой формулы.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}$

Очевидно, что при $x \to -\frac{\pi}{2}$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю. Разложив числитель и знаменатель на множители и сократив дробь на
$1 + \sin x$, получим
$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x} = \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{(1+\sin x)(1-\sin x+\sin^2 x)} = \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1-\sin x+\sin^2 x} =$
$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin(-\frac{\pi}{2})}{1-\sin(-\frac{\pi}{2})+\sin^2(-\frac{\pi}{2})} = \frac{1+1}{1+1+1+1} = \frac{2}{3}$
Пример 2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x}{3x}$
Преобразуя заданное выражение и используя первый замечательный предел, получим $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x}{3x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{4\sin 4x}{4\cdot 3x} = \frac{4}{3}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x}{4x} = \frac{4}{3}\cdot 1 = \frac{4}{3}$
Пример 3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x}$
Преобразовав разность косинусов в произведение по формуле
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, получим:
$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x} = 2\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x\sin x}{x} = 4\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\lim\limits_{x\to0}\sin x = 4\cdot 1\cdot 0 = 0$
Имеет место соотношение $\mathbf{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$ = **e,** которое называется **вторым замечательным пределом**. Число ***e*** – иррациональное
($e \approx 2,718\ldots$) Логарифмы с основанием *e* называются натуральными, для них введено обозначение ***ln.***
Пример 4. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^x$
Выполнив преобразования и используя второй замечательный предел, находим: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^x = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x/3})^{(\frac{x}{3})\cdot 3} = [\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x/3})^{(\frac{x}{3})}]^3 = e^3$
Пример 5. $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{5}{x}} = \lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2\cdot 5} = [\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^{10} = e^{10}$

Пример 6. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{1+x})^x = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x})^{-x} = [\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x]^{-1} = e^{-1}$
Задание 2.
1 Вычисление пределов тригонометрических выражений
1. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$
2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\mathrm{tg}x-1}$

2. Первый замечательный предел: $\mathbf{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x} = 1}$
3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x}{9x}$
4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{\sin 14x}$
5. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\frac{x}{5}}$
6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x\cdot\cos x}{5x}$
7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}6x}{\sin 8x}$
8. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(1-x)}{x^2-1}$
9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x+\sin 4x}{x}$

10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$

3. Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{7}{x})^x$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^x$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^{\frac{x}{7}}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{3x})^{4x}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{5}{4x})^{\frac{x}{2}}$

Контроль знаний обучающихся:

- проверить практическую работу;
- устный опрос.

1. Какая формула называется первым замечательным пределом?
2. Какая формула называется вторым замечательным пределом?

Требования к оформлению практической работы:

Задание должно быть выполнено в тетради для практических работ

Работу сдать после занятия

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА№ 4
Тема: Техника дифференцирования

Цели:

- повторить основные формулы и правила дифференцирования;

Оснащение занятия: конспект лекций.

Критерии оценок

оценка «5» ставится за верное выполнение всех заданий работы

оценка «4» ставится за выполнение любых пяти заданий работы

оценка «3» ставится за выполнение любых четырех заданий работы

Порядок выполнения работы

Задание 1.

- Ознакомиться с лекцией № 5
- Выписать в тетрадь формулы и правила для вычисления производных
- Записать в тетрадь решение рассмотренных примеров

Задание 2.

Решить примеры для самостоятельного решения

Лекция 5.
Тема « Производная и дифференциал. Основные правила дифференцирования»

Производной функции у = f(x) в точке х (производной первого порядка) называется предел отношения приращения Δyфункции к приращению аргумента Δx, когда последнее стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Если этот предел конечный, то функция у = f(x) называется ***дифференцируемой*** в точке *x*; в противном случае (т. е. если он не существует или равен бесконечности) – ***недифференцируемой.*** В том случае, когда предел есть бесконечность, говорят, что функцияу = f(x) имеет в точке ***хбесконечную производную***.

Дифференциалом dy функцииу = f(x) (***дифференциалом первого порядка)*** называется главная часть её приращения, пропорциональная приращению Δx независимой переменной.

Дифференциал *dx*независимой переменной *x* равен её приращению Δx

$dx = \Delta x$

Дифференциал любой дифференцируемой функции y = f(x) равен ***произведению её производной на дифференциал независимой переменной:***

$dy = y'(x)dx$

Это соотношение остаётся в силе и тогда, когда x есть функция другого аргумента – в этом заключается ***инвариантность*** формы первого дифференциала. Из формулы $dy = y'(x)dx$ получаем $y'(x) = \frac{dy}{dx}$, т. е. производная первого порядка функции y = f(x) равна отношению первого дифференциала функции к дифференциалу её аргумента.

Основные правила дифференцирования:

1. C'= 0
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$– производная суммы или разности
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$- производная произведения
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ - производная дроби

Таблица производных основных элементарных функций:

1. $x' = 1$
2. $(ax + в)' = a$
3. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
5. $(x^n)' = nx^{n-1}$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = \sin x$
8. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$
13. $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
14. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
15. $(e^x)' = e^x$
16. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
17. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Примеры

1. $y(x) = -7x^3 + 9x^2 + 4x - 1$Найти: y'(x)

$y'(x) = -7 \cdot 3x^2 + 9 \cdot 2x + 4 \cdot 1 - 0 = -21x^2 + 18x + 4$

2. $y(x) = -\frac{9}{x} + 4\sqrt{x} + 17x^4$ Найти: y'(x)

$y'(x) = -9 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 17 \cdot 4x^3 = \frac{9}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 68x^3$

3. $y(x) = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1)$ Найти: y'(x)

$y'(x) = (x^3 - 1)'(x^2 + x + 1) + (x^3 - 1)(x^2 + x + 1)' =$

$= 3x^2(x^2 + x + 1) + (x^3 - 1)(2x + 1) =$

$= 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x^4 + x^3 - 2x - 1 = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1$

4. $y(x) = (3x^2 + 1)(2x^2 + 3)$ Найти: y'(-1). Решить самостоятельно.

5. $y(x) = (4x^3 - 2x^2 - 5x)(x^2 - 7x)$ Найти: y'(1). Решить самостоятельно.

6. $y(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$Найти: y'(x)

$y'(x) = \frac{(x^2+1)'(x^2-1) - (x^2+1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x^2-1) - (x^2+1)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$

7. $y(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$Найти: y'(1). Решить самостоятельно.

8. $y(x) = \frac{-x^2+2x+3}{x^3-2}$Найти: y'(2). Решить самостоятельно.

Контроль знаний обучающихся:

- проверить практическую работу;
- устный опрос.

1. Назвать основные формулы для вычисления производных
2. Назвать основные правила для вычисления производных

Требования к оформлению практической работы:
Задание должно быть выполнено в тетради для практических работ
Работу сдать после занятия

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА№ 5

Тема: Вычисление производных тригонометрических, логарифмических и показательных функций. Производные сложных функций. Производные высших порядков

Цели:

- повторить формулы для вычисления производных тригонометрических, логарифмических и показательных функций;
- повторить правило для нахождения производных сложных функций
- изучить правило для нахождения производных высших порядков

Оснащение занятия: конспект лекций.

<u>Критерии оценок</u>

оценка «5» ставится за верное выполнение всех заданий работы
оценка «4» ставится за верное выполнение любых семи заданий работы
оценка «3» ставится за верное выполнение любых шести заданий работы

Порядок выполнения работы

Задание 1.
- Ознакомиться с лекцией № 6
- Выписать в тетрадь формулы и правила для вычисления производных
- Записать в тетрадь решение рассмотренных примеров

Задание 2.
Решить примеры для самостоятельного решения

Лекция 6.

Тема «Вычисление производных тригонометрических, логарифмических и показательных функций».

1. $y(x) = \frac{x-\sin x}{\sqrt{x}}$

$y'(x) = \frac{(x-sinx)'\sqrt{x}-(x-sinx)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{(1-cosx)\sqrt{x}-(x-sinx)(\frac{1}{2\sqrt{x}})}{x} = \frac{(1-cosx)x-(x-sinx)}{2x\sqrt{x}} =$

$= \frac{x-xcosx-x+sinx}{2x\sqrt{x}} = \frac{sinx-xcosx}{2x\sqrt{x}}$

2. $y(x) = x^2 tgx$

$y'(x) = (x^2)'tgx + x^2(tgx)' = 2xtgx + x^2\frac{1}{\cos^2 x} = 2x\frac{sinx}{cosx} + x^2\frac{1}{\cos^2 x} =$

$= \frac{x}{cosx}(2sinx + \frac{x}{cosx})$

3. $y(x) = \pi x^2 - arccosx$

$y'(x) = \pi \cdot 2x - (-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}) = 2\pi x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4. $y(x) = e^x(x^2 - 4x)$

$y'(x) = (e^x)' \cdot (x^2 - 4x) + (e^x) \cdot (x^2 - 4x) = e^x(x^2 - 4x) + e^x(2x - 4) =$

$= e^x(x^2 - 4x + 2x - 4) = e^x(x^2 - 2x - 4)$

5. $y(x) = 6^x \cdot arctgx$

$y'(x) = (6^x)' \cdot arctgx + 6^x \cdot (arctgx)' = 6^x \ln 6 \cdot arctgx + 6^x \cdot \frac{1}{1+x^2} =$

$= 6^x(\ln 6\, arctgx + \frac{1}{1+x^2})$

6. $y(x) = 2\ln x - \frac{3}{x^2}$

$y(x) = 2\ln x - 3x^{-2}$

$y'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} - 3(-2)x^{-3} = \frac{2}{x} + \frac{6}{x^3} = \frac{2x^2+6}{x^3}$

7. $y(x) = x^2\log_4 x$

y'(x) = $(x^2)'\log_4 x + x^2(\log_4 x)' = 2x\log_4 x + x^2\frac{1}{x\ln 4}$ = x(2$\log_4$ x + $\frac{1}{\ln 4}$)

Примеры для самостоятельного решения

8. y(x) = sinx· arccosx Найти: y'(x)

9. y(x) = $\frac{\cos x}{e^x}$ Найти: y'(x)

10. y(x) = $\frac{e^x-2}{\ln x}$ Найти: y'(x)

Тема «Производные сложных функций».

Пусть y = y(u) и u = u(x) – дифференцируемые функции. Тогда сложная функция y = y(u(x)) есть также дифференцируемая функция, причем

$y'_x = y'_u \cdot u'_x$Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций: ***производная сложной функции равна произведению производных функций, её составляющих.***

Примеры:

1. y(x) = $\ln(x^3 - 3x^2 + 4x)$

y'(x) = $(\ln(x^3 - 3x^2 + 4x))' \cdot (x^3 - 3x^2 + 4x)' = \frac{1}{x^3-3x^2+4x}(3x^2 - 6x + 4) =$

$$= \frac{3x^2 - 6x + 4}{x^3 - 3x^2 + 4x}$$

2. y(x) = $e^{\arccos x}$

y'(x) = $(e^{\arccos x})' \cdot (\arccos x)' = e^{\arccos x} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}$

3. y(x) = $\sin(\ln\sqrt{x})$

y'(x) = $(\sin(\ln\sqrt{x}))' \cdot (\ln\sqrt{x})' \cdot (\sqrt{x})' = \cos(\ln\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos(\ln\sqrt{x})}{2x}$

4.y(x) = $\ln\sqrt{\sin x}$

y'(x) = $(\ln\sqrt{\sin x})' \cdot (\sqrt{\sin x})' \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x = \frac{1}{2\sin x} \cdot \cos x = \frac{1}{2}\mathrm{tg}x$

5. y(x) = arctgln2x

y'(x) = $\frac{1}{1+(\ln 2x)^2} \cdot (\ln 2x)' \cdot (2x)' = \frac{1}{1+(\ln 2x)^2} \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x(1+\ln^2 2x)}$

6.y(x) = $(6x^2 - \frac{2}{x^4}+5)^2$

y(x) = $(6x^2 - 2x^{-4}+5)^2$

y'(x) = $2(6x^2 - 2x^{-4}+5) \cdot (6x^2 - 2x^{-4}+5)' = 2(6x^2 - 2x^{-4}+5) \cdot (12x+8x^{-5})$ =

= $(12x^2 - \frac{2}{x^4}+5) \cdot (12x + \frac{8}{x^5})$

Примеры для самостоятельного решения:

7. y(x) = $\cos\sqrt{x^2+3}$Найти: y'(x)

8. y(x) = $\arcsin\ln 4x$Найти: y'(x)

9. y(x) = sin4x · $e^{\mathrm{ctg}x}$Найти: y'(x)

Тема «Производные и дифференциалы высших порядков»

Производная второго порядка (вторая производная) от функции y = f(x) есть производная от её первой производной: y''= (f '(x))'

Производная третьего порядка (третья производная) от функции y = f(x) есть производная от её второй производной: y'''= (f ''(x))'

Производная n-го порядка (*n*-я производная) от функции y = f(x) есть производная от её (n – 1)-й производной: $y^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'$

Дифференциал второго порядка (второй дифференциал) функции y = f(x) есть дифференциал от её первого дифференциала: $d^2y = d(dy)$

Дифференциал третьего порядка (третий дифференциал) функции y = f(x) есть дифференциал от её второго дифференциала: $d^3y = d(d^2y)$

Дифференциал n-го порядка (*n*-й дифференциал) функции y = f(x) есть дифференциал от её (*n* – 1)-го дифференциала: $d^ny = d(d^{n-1}y)$

Если x независимая переменная, то $d^ny = y^{(n)} \cdot dx^n$, откуда $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$, т. е. n-я производная функции y = f(x) равна отношению её n-го дифференциала $d^n y$ к n-й степени дифференциала независимой переменной dx.

Если функция имеет производную *n-го порядка*, то говорят, что ***функция дифференцируемап раз***

Примеры: Найти производные второго порядка от указанных функций

1. $y(x) = (2x+5)^3$

$y'(x) = 3(2x+5)^2\cdot(2x+5)' = 3(2x+5)^2\cdot 2= 6(2x+5)^2$

$y''(x) = (6(2x+5)^2)' = 6\cdot 2(2x+5)\cdot 2 = 24(2x+5)$

2. $y(x) = e^x\cos x$

$y'(x) = (e^x)'\cos x + e^x(\cos x)'= e^x\cos x + e^x(-\sin x) = e^x(\cos x - \sin x)$

$y''(x) = (e^x)'(\cos x - \sin x) + e^x(\cos x - \sin x)' = e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x) = e^x(\cos x - \sin x - \sin x - \cos x) = -2e^x\sin x$

3. Найти второй дифференциал и третью производную от функции $y = x\ln 2x$ в точке $x = 2$

Решение: Дифференцируя данную функцию, получим

$y'(x) = \ln 2x + x\cdot\frac{2}{2x} = \ln 2x + 1$

Дифференцируя производную y', найдем вторую производную

$y''= (y'(x))' = (\ln 2x + 1)' =(\ln 2 + \ln x + 1)' = \frac{1}{x}$

и второй дифференциал $d^2y = \frac{1}{x}dx^2$.

Таким образом, третья производная $y''' = (y'')' = -\frac{1}{x^2}$

При x = 2 имеем $y'''(2) =-\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4}$

Примеры для самостоятельного решения:

Найти производные второго порядка от функций

4. $y = e^{-x^2}$

5. $y = \operatorname{tg} x$

Контроль знаний обучающихся:

- проверить практическую работу;
- устный опрос.

1. Назвать правило для вычисления производных сложных функций
2. Назвать правило для вычисления производных высших порядков

Требования к оформлению практической работы:

Задание должно быть выполнено в тетради для практических работ

Работу сдать после занятия

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА№ 6

Тема: Применение производной для исследования функции. Монотонность и экстремумы функции.

Цели:

- повторить правила нахождения промежутков монотонности и экстремумов функции с помощью производной
- научиться решать примеры на нахождение промежутков монотонности и экстремумов функций

Оснащение занятия: конспект лекций.

Критерии оценок

оценка «5» ставится за правильные ответы на вопросы и верное выполнение всех заданий работы

оценка «4» ставится за правильные ответы на вопросы и верное выполнение любых четырех заданий работы

оценка «3» ставится за правильные ответы на вопросы и верное выполнение любых трех заданий работы

Порядок выполнения работы

Задание 1.

- Ознакомиться с лекцией № 7
- Пользуясь лекциями, ответить на вопросы и ответы записать в тетрадь:

1.Какая функция называется возрастающей (убывающей)?

2. Каким образом монотонность связана с производной?
3. Выпишите в тетрадь правило для отыскания промежутков монотонности.

4.Что такое точки экстремума и экстремумы функции?

5. Как с помощью производной находят экстремумы функции? Записать в тетрадь правило отыскания экстремумов функции.

Лекция 7.

Тема «Применение производной к исследованию функций и построению графиков.

Промежутки монотонности и экстремумы функции»

Функция называется ***возрастающей (убывающей)*** в некотором промежутке, если в этом промежутке каждому большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции. Как возрастающие, так и убывающие функции называются ***монотонными.*** Если функция не является монотонной, то область её определения можно разбить на конечное число промежутков монотонности (которые иногда чередуются с промежутками постоянства функции).

Монотонность функции *y* = *f(x)* характеризуется знаком её первой производной *f '(x)*, а именно, ***если в некотором промежутке*** $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$]***, то функция возрастает (убывает) в этом промежутке.*** Следовательно, отыскание промежутков монотонности функции *y* = *f(x)*сводится к нахождению промежутков знакопостоянства её первой производной*f '(x).*

Отсюда получаем **правило для нахождения промежутков монотонности функциии*y = f(x).***

1. Найти нули и точки разрыва *f '(x).*
2. Определить знак f '(x) в промежутках, на которые полученные в п. 1 точки делят область определения функции*f(x)*; промежутки, в которых $f'(x) > 0$, являются промежутками возрастания функции, а промежутки, в которых $f'(x) < 0$, являютсяпромежуткамиубыванияфункции. При этом если на двух соседних промежутках, граничная точка которых является нулем производной *f '(x),* знак *f '(x)* одинаков, то они составляют единый промежуток монотонности.

Пример.

1. Найти промежутки монотонности функции $y = x^4 - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x$

Решение. Данная функция определена на всей числовой оси. Дифференцируя, получим: $y' = 4x^3 - x^2 - 4x + 1 = 4x(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = (x^2 - 1)(4x - 1)$. Точек разрыва производная y' не имеет, а в нуль она обращается в трех точках: $x = -1$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 1$. Этими точками область определения разбивается на четыре промежутка $(-\infty; -1)$, $\left(-1; \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$, $(1; +\infty)$, в каждом из которыхy' сохраняет постоянный знак.

Определим знаки производной в этих промежутках, используя метод интервалов. Тогда получим, что в промежутках $(-\infty; -1)$ и $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$ выполняется неравенство $y' < 0$, а в промежутках $\left(-1; \frac{1}{4}\right)$ и $(1; +\infty)$ - неравенство $y' > 0$. Следовательно, в промежутках $(-\infty; -1)$ и $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$ функция убывает, а в промежутках$\left(-1; \frac{1}{4}\right)$ и $(1; +\infty)$ - возрастает.

Точка $x = x_0$ называется ***точкой максимума (минимума)*** функции *y* = *f(x)*, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x (x \neq x_0)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ (соответственно$f(x) > f(x_0)$)

Точки максимума и минимума функции называются ***точками её экстремума***, а значение функции в точке максимума (минимума) – ***максимумом (минимумом)*** или ***экстремумом*** функции.

Точками экстремума могут служить только критические точки I рода, т. е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых первая производная *f '(x)* обращается в нуль или терпит разрыв.

Точками экстремума являются лишь те из критических точек, при переходе через которые первая производная $f'(x)$ меняет знак, а именно, ***если при переходе через критическую точку $x = x_0$ в положительном направлении $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то $x = x_0$ есть точка максимума (минимума).***

Отсюда получаем **правило отыскания экстремумов функции $y = f(x)$.**

1. Найти нули и точки разрыва $f'(x)$.

2. Определить знак $f'(x)$ в промежутках, на которые полученные в п. 1 точки делят область определения функции $f(x)$.

3. Из этих точек выделить те, в которых функция $f(x)$ определена и по разные стороны от каждой из которых производная $f'(x)$ имеет разные знаки – это и есть экстремальные точки. При этом экстремальная точка $x = x_0$ является точкой максимума, если при движении по оси Ox в положительном направлении она отделяет промежуток, в котором $f'(x) > 0$, от промежутка, в котором $f'(x) < 0$, и точкой минимума в противном случае.

Заметим, что точки, в которых производная обращается в нуль, иногда проще исследовать на экстремум, выяснив знак второй производной $f''(x_0)$: ***точка $x = x_0$, в которой $f'(x_0) = 0$, а $f''(x)$ существует и отлична от нуля, является экстремальной,*** а именно ***точкой максимума, если $f''(x_0) < 0$, и точкой минимума, если $f''(x_0) > 0$.***

Пример.

1. Найти экстремумы функции $y = 6x^4 – 8x^3 – 3x^2 + 6x$

Решение. Здесь $D(y) = R$. Дифференцируя данную функцию, находим

$y' = 24x^3 – 24x^2 – 6x + 6 = 6(4x^3 – 4x^2 – x + 1) = 6[4x^2(x – 1) – (x – 1)] =$
$6(4x^2 – 1)(x – 1) = 6(2x – 1)(2x + 1)(x – 1)$.

Производная обращается в нуль при $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$. Эти три точки разбивают всю числовую ось на четыре промежутка $(-\infty, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$, $(1, +\infty)$, внутри которых y' сохраняет определенный знак. Найдем знак производной в каждом из указанных промежутков: на $(-\infty, -\frac{1}{2})$ имеем $y' < 0$; на $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ имеем $y' > 0$; на $(\frac{1}{2}, 1)$ имеем $y' < 0$; на $(1, +\infty)$ имеем $y' > 0$.

Отсюда следует, что точки $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ являются экстремальными, так как при переходе через каждую из них производная меняет знак. При этом в точках $x = -\frac{1}{2}$ и $x = 1$ происходит смена знаков с минуса на плюс, т. е. это – точки минимума; при переходе через точку $x = \frac{1}{2}$ знак производной меняется с плюса на минус, значит, это – точка максимума.

Экстремумы функции найдем, вычислив её значения в экстремальных точках: $y_{min} = y(-\frac{1}{2}) = -\frac{19}{8}$, $y_{max} = y(\frac{1}{2}) = \frac{13}{8}$, $y_{min} = y(1) = 1$.

Задание 2. Решить предложенные примеры

Примеры для самостоятельного решения.

Найдите промежутки монотонности следующих функций:

1. $y = x^4 - 32x + 40$
2. $y = \ln x - \frac{1}{3}x^3$
3. $y(x) = \frac{x^2-12}{x-4}$

Исследовать функцию на экстремумы:

4. $y(x) = 3x^4 – 4x^3$
5. $y(x) = \frac{x^2+16}{x+3}$

Контроль знаний обучающихся:

- проверить практическую работу;

Требования к оформлению практической работы:

Задание должно быть выполнено в тетради для практических работ

Работу сдать после занятия

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА№ 7

Тема: Применение производной для исследования функции.

Цели:

- изучить правило нахождения промежутков выпуклости и вогнутости функции и точек перегиба с помощью второй производной
- научиться решать примеры на нахождение промежутков выпуклости-вогнутости функции и точек перегиба.
- научиться находить асимптоты графика функции

Оснащение занятия: конспект лекций.

Критерии оценок

оценка «5» ставится за правильные ответы на вопросы и верное выполнение всех заданий работы

оценка «4» ставится за правильные ответы на вопросы и верное выполнение любых четырех заданий работы

оценка «3» ставится за правильные ответы на вопросы и верное выполнение любых трех заданий работы

Порядок выполнения работы

Задание 1.

- Ознакомиться с лекцией № 8

- Пользуясь лекциями, ответить на вопросы и ответы записать в тетрадь:

1. Какая точка называется точкой перегиба функции?

2. Выпишите в тетрадь правило для отыскания промежутков выпуклости – вогнутости функции и точек перегиба.

3.Какие виды асимптот вы знаете?

4. Как находятся разные виды асимптот?

5. Выписать в тетрадь рассмотренные в лекциях примеры по нахождению промежутков выпуклости, вогнутости функции, точек перегиба и асимптот

Лекция 8.

Тема «Применение производной к исследованию функций и построению графиков. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба».

Кривая называется ***выпуклой (вогнутой)*** в некотором промежутке, если она расположена ниже(выше) касательной, проведенной к кривой в любой точке этого промежутка. Выпуклость или вогнутость кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$, характеризуется знаком второй производной $f''(x)$, а именно, ***если в некотором промежутке*** $f''(x) < 0$ ***(соответственно*** $f''(x) > 0$***), то кривая выпукла (вогнута) в этом промежутке.***

Таким образом, отыскание промежутков выпуклости и вогнутости графика функции $y = f(x)$ сводится к нахождению промежутков знакопостоянства её второй производной $f''(x)$.

Точкой перегиба кривой называется такая её точка, которая отделяет участок выпуклости от участка вогнутости.

Точками перегиба графика функции $y = f(x)$ являются лишь те из указанных точек, ***при переходе через которые вторая производная*** $f''(x)$ ***меняет знак.***

Отсюда получаем **правило отыскания промежутков выпуклости и вогнутости и точек перегиба графика функции.**

1. Найти точки, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

2. Определить знак $f''(x)$ в промежутках, на которые полученные в п. 1 точки делят область определения $f(x)$; промежутки, в которых $f''(x) > 0$, –промежутки вогнутости, а промежутки, в которых $f''(x) < 0$, - промежутки выпуклости графика функции $y = f(x)$. При этом если на двух соседних промежутках, граничная точка которых является нулем второй производной, знак $f''(x)$ одинаков, то они составляют единый промежуток выпуклости или вогнутости.

3. Из полученных в п. 1 точек выделить те, в которых функция $f(x)$ определена и по разные стороны от каждой из которых вторая производная $f''(x)$ имеет противоположные знаки, - это и есть абсциссы точек перегиба графика функции $y = f(x)$.

Пример.

1. Найти промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 31x - 37$

Решение. Область определения данной функции D(y) = R. Дифференцируя $f(x)$ дважды, получим

$f'(x) = 4x^3 - 30x^2 + 72x - 31$, $f''(x) = 12x^2 - 60x + 72 = 12(x - 2)(x - 3)$

Вторая производная существует на всей числовой оси и обращается в нуль при x = 2 и x = 3. Этими точками область определения $f''(x)$ разбивается на три промежутка $(-\infty, 2)$, (2, 3), $(3, +\infty)$, внутри которых вторая производная сохраняет знак. Найдем знак $f''(x)$ в каждом из них: на $(-\infty, 2)$ имеем $f''(x) > 0$; на (2, 3) имеем $f''(x) < 0$; на $(3, +\infty)$ имеем $f''(x) > 0$.

Таким образом, в промежутках $(-\infty, 2)$ и $(3, +\infty)$ кривая вогнута, а в промежутке (2, 3) - выпукла. Граничные точки x = 2 и x = 3 указанных промежутков являются абсциссами точек перегиба. Вычислим значения функции $f(x)$ в этих точках: $f(2) = -19$, $f(3) = 5$. Итак, данная функция имеет две точки перегиба (2; -19) и (3; 5).

Тема «Асимптоты»

Прямая $Ax + By + C = 0$ называется ***асимптотой*** кривой $y = f(x)$, если расстояние от этой прямой до точки $M(x; f(x))$ данной кривой стремится к нулю при $x^2 + y^2 \to \infty$. Различают три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Если по крайней мере один из пределов функции $y = f(x)$ в точке a справа или слева равен бесконечности, т. е. если

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x\to a+0} f(x) = \infty,$$

то прямая $x = a$ является ***вертикальной асимптотой.***

Если существует конечный предел функции при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, т. е. если $\lim_{x\to+\infty} f(x) = в$ или $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$, то прямая $y = в$ $(y = c)$ является ***горизонтальной асимптотой*** (при $x \to +\infty$ она называется ***правой***, а при $x \to -\infty$ - ***левой).***

Если существуют пределы

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1 \text{ и } \lim_{x\to+\infty} [f(x) - k_1x] = b_1,$$

то прямая $y = k_1x + b_1$ служит ***наклонной (правой) асимптотой.***

Аналогично, если существуют пределы

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2 \text{ и } \lim_{x\to-\infty} [f(x) - k_2x] = b_2,$$

то прямая $y = k_2x + b_2$ служит ***наклонной (левой) асимптотой.***

Заметим, что горизонтальную асимптоту можно рассматривать как частный случай наклонной асимптоты при k = 0.

Примеры.

1. Найти асимптоты кривой $y = \frac{-5x+3}{x+2}$

Решение. Кривая имеет вертикальную асимптоту x = -2, так как

$$\lim_{x\to-2-0} \frac{-5x+3}{x+2} = -\infty, \quad \lim_{x\to-2+0} \frac{-5x+3}{x+2} = +\infty$$

(x = -2 – точка разрыва II рода).

Найдем горизонтальную асимптоту: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-5x+3}{x+2} = -5$.

Итак, данная кривая имеет вертикальную асимптоту x = -2 и горизонтальную асимптоту $y = -5$.

2. Найти асимптоты кривой $y = \frac{-x^2+7x}{x-3}$

Решение. Кривая имеет вертикальную асимптоту x = 3, поскольку

$$\lim_{x\to3-0} \frac{-x^2+7x}{x-3} = +\infty, \quad \lim_{x\to3+0} \frac{-x^2+7x}{x-3} = -\infty.$$

Так как при $x \to \infty$ функция не имеет конечного предела, то горизонтальных асимптот у данной кривой нет. Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2+7x}{(x-3)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2+7x}{x^2-3x} = -1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y - кx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-x^2+7x}{x^2-3x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x-3} = 4$$

Следовательно, прямая y= –x + 4 служит наклонной асимптотой (рис. 1)

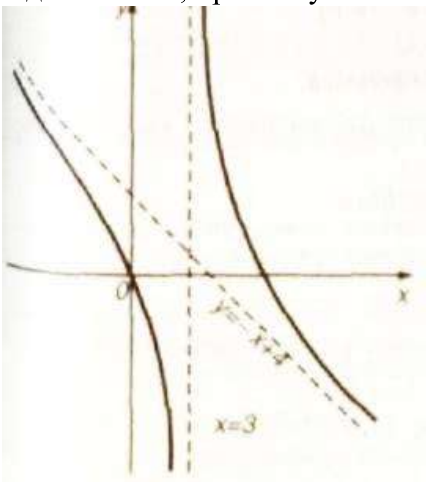


рис 1

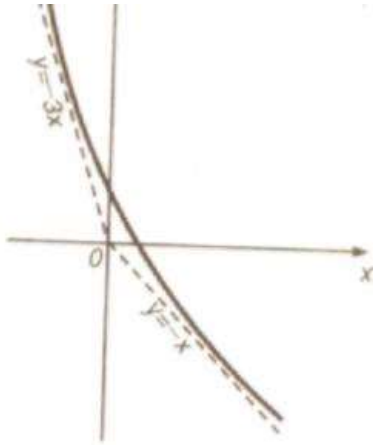


рис 2

3. Найти асимптоты кривой $y = \sqrt{1+x^2} - 2x$

Решение. Вертикальных асимптот кривая не имеет, так как данная функция непрерывна на всей числовой оси. Будем искать наклонные асимптоты; поскольку пределы при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ различны, надо рассмотреть отдельно два случая.

Находим правую асимптоту (при $x \to +\infty$):

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-2x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-2}{1} = -1$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x^2} - 2x + x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x^2} - 2) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0$$

Следовательно, при $x \to +\infty$ кривая имеет наклонную асимптоту $y = -x$

Найдем теперь левую асимптоту (при $x \to -\infty$):

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-2x}{x} = \lim_{z\to+\infty} \frac{\sqrt{1+z^2}+2z}{-z} = \lim_{z\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{z^2}+1}+2}{-1} = -3$$

$b_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{1+x^2} - 2x + 3x) = b_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{1+x^2} + x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = 0$, так как при $x < 0$ оба слагаемых в знаменателе положительны. Итак, при $x \to -\infty$ кривая имеет наклонную асимптоту $y = -3x$ (рис. 2).

Задание 2. Решить предложенные примеры самостоятельно.

Примеры для самостоятельного решения

Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба графики следующих функций:

1. $y = 3x^5 - 10x^4 - 30x^3 + 12x + 7$
2. $y = \frac{x}{x^2+9}$
3. $y = \ln(x^2 + 4)$

Найти асимптоты заданных кривых:

4. $y = \frac{2x+1}{x-3}$
5. $y = \frac{x^2-1}{x}$

Исследовать и построить графики функций:

1. $y = \frac{x^2+1}{x}$
2. $y = \frac{x^2-3}{x+2}$

Контроль знаний обучающихся:

- проверить практическую работу;

Требования к оформлению практической работы:

Задание должно быть выполнено в тетради для практических работ

Работу сдать после занятия

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА№ 8

Тема: Техника интегрирования. Непосредственное интегрирование

Цели:

- изучить формулы и правила для вычисления неопределенного интеграла
- научиться решать примеры на непосредственное интегрирование

Оснащение занятия: конспект лекций.

Критерии оценок

оценка «5» ставится за правильные ответы на все вопросы и верное выполнение всех заданий работы

оценка «4» ставится за правильные ответы на все вопросы и верное выполнение любых девяти заданий работы

оценка «3» ставится за правильные ответы на все вопросы и верное выполнение любых семи заданий работы

Порядок выполнения работы

Задание 1.

- Ознакомиться с лекцией № 9
- Пользуясь лекциями, ответить на вопросы и ответы записать в тетрадь:

1.Какие свойства неопределенного интеграла вы знаете?

2. Выписать в основные формулы интегрирования

3. Какие случаи возможны при непосредственном интегрировании?

Задание 2.

Решить примеры для самостоятельного решения

Лекция 9.

Тема «Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование»

Функция F(x) называется первообразной для функции f(x), если F '(x) = f(x).

Любая непрерывная функция f(x) имеет бесконечное множество первообразных, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

Общее выражение F(x) +C совокупности всех первообразных для функции f(x) называется ***неопределенным интегралом*** от этой функции:

$\int f(x)dx = F(x) + C$, если $d(F(x) + C) = \int f(x)dx$

Основные свойства неопределенного интеграла

1^0.Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции и дифференциал от него равен подынтегральному выражению:

$(\int f(x)dx)' = f(x)$; $d(\int f(x)dx) = f(x)\,dx$

2^0. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int df(x) = f(x) + C$$

3^0. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла.

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

4^0.Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых функций:

$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)dx$

5^0. Если а – постоянная, то справедлива формула

$$\int dx = \int d(x + a), \int dx = \frac{1}{a}\int d(ax)$$

Основные формулы интегрирования (табличные интегралы)

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\,\mathrm{ctg}x + C$

10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$

При применении формул (3), (10). (11) знак абсолютной величины пишется только в тех случаях, когда выражение, стоящее под знаком логарифма, может иметь отрицательное значение.

Каждую из формул легко проверить. В результате дифференцирования правой части получается подынтегральное выражение.

Непосредственное интегрирование.

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов. Здесь могут представиться следующие случаи:

1) данный интеграл находится непосредственно по соответствующему табличному интегралу;

2) данный интеграл после применения свойств 3^0 и 4^0 приводится к одному или нескольким табличным интегралам;

3) данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией и применения свойств 3^0 и 4^0 приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Примеры.

1. $\int 5dx$

Решение. На основании свойства 3^0 постоянный множитель 5 выносится за знак интеграла и, используя формулу 1, получим

$\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$

2. $\int 6x^2 dx$

Решение. Используя свойство 3^0 и формулу 2, получим

$\int 6x^2 dx = 6\int x^2 dx = 6 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = 2x^3 + C$

3. $\int 4(x^2 - x + 3)\, dx$

Решение. Используя свойства 3^0 и 4^0 и формулы 1 и 2, имеем

$\int 4(x^2 - x + 3)\, dx = 4\int x^2 dx - 4\int x\, dx + 12\int dx = 4 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 12x + C = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + C$

Постоянная интегрирования C равна алгебраической сумме трех постоянных интегрирования, так как каждый интеграл имеет свою произвольную постоянную ($C_1 - C_2 + C_3 = C$)

4. $\int (1 - 6^x)^2 dx$

Решение. Возводя в квадрат и интегрируя каждое слагаемое, имеем

$\int (1 - 6^x)^2 dx = \int (1 - 2 \cdot 6^x + 36^x) dx = x - \frac{2}{\ln 6} \cdot 6^x + \frac{36^x}{2\ln 6} + C$

5. $\int \mathrm{ctg}^2 x dx$

Используя тригонометрическую формулу $1 + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$, находим

$\int \mathrm{ctg}^2 x dx = \int (\frac{1}{\sin^2 x} - 1)dx = -\,\mathrm{ctg}x - x + C$

6. $\int \frac{x^2}{9 - x^2} dx$

Решение. Вычитая и прибавляя в числителе подынтегральной функции число 9, получим

$\int \frac{x^2}{9 - x^2} dx = \int \frac{x^2 - 9 + 9}{9 - x^2} dx = \int (-1 + \frac{9}{9 - x^2}) dx = -\int dx + 9\int \frac{dx}{9 - x^2} =$

$= -x + 9 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + C = -x + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + C$

Примеры для самостоятельного решения

Вычислите интегралы, используя непосредственное интегрирование:

1. $\int 2(3x-1)^2dx$
2. $\int \frac{dx}{x^4}$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$
4. $\int \frac{5dx}{x}$
5. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2}}$
6. $\int \frac{dx}{x^2-4}$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$
8. $\int \frac{dx}{7\sin^2 x}$
9. $\int \frac{32^x-2^x}{4^x}dx$
10. $\int \frac{3+x^2}{1+x^2}$
11. $\int \sqrt[3]{x^2(5\sqrt[3]{x}-1)}dx$

Контроль знаний обучающихся:

- проверить практическую работу;

Требования к оформлению практической работы:

Задание должно быть выполнено в тетради для практических работ

Работу сдать после занятия

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА№ 9

Тема: Техника интегрирования. Интегрирование методом замены переменной

Цели:

- научиться применять метод замены переменной при вычислении неопределенного интеграла

Оснащение занятия: конспект лекций.

<u>Критерии оценок</u>

оценка «5» ставится за верное выполнение всех заданий работы

оценка «4» ставится за верное выполнение любых семи заданий работы

оценка «3» ставится за верное выполнение любых пяти заданий работы

Порядок выполнения работы

Задание 1.

- Ознакомиться с лекцией № 10
- Выписать тетрадь примеры на применение метода замены переменной и метода интегрирования по частям при вычислении неопределенного интеграла

Задание 2.

Решить примеры для самостоятельного решения

Лекция 10.

Тема «Неопределенный интеграл. Метод замены переменной»

В основе интегрирования методом замены переменной лежит свойство инвариантности формул интегрирования, которое заключается в следующем: если $\int f(x)dx = F(x) + C$,

то $\int f(u)dx = F(u) + C$,

где u(x) – произвольная дифференцируемая функция от x.

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок следующих двух типов:

1) x = φ (t), где t – новая переменная, а φ (t) – непрерывно дифференцируемая функция. В этом случае формула замены переменной такова:

$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$(1)

Функцию φ(t) стараются выбирать таким образом, чтобы правая часть формулы (1) приобрела более удобный для интегрирования вид;

2) t = μ(x), где t – новая переменная. В этом случае формула замены переменной имеет вид: $\int f(\mu(x))\mu'(x)dx = \int f(t)dt$

Примеры.

1. $\int \sin 3x dx$

Решение. Данный интеграл окажется табличным, если под знаком дифференциала будет находиться аргумент 3x подынтегральной функции sin3x. Так как d(3x) = 3dx, то

$\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x d(3x)$

Следовательно, подстановка 3x = t приводит рассматриваемый интеграл к табличному: $\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x d(3x) = \frac{1}{3}\int \sin t dt = -\frac{1}{3}\cos t + C$

Возвращаясь к старой переменной x, окончательно получим

$\int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$

2. $\int \frac{x^2 dx}{8+x^3}$

Решение. Так как $d(8+x^3) = 3x^2dx$, то $\int \frac{x^2dx}{8+x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{d(8+x^3)}{8+x^3}$

Полагая $8+x^3 = t$, получим

$\int \frac{x^2dx}{8+x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln|8+x^3| + C.$

3. $\int \frac{\cos x\, dx}{4+\sin^2 x}$

Решение. Поскольку d(sinx) = cosx, имеем

$$\int \frac{\cos x\, dx}{4+\sin^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{4+\sin^2 x}$$

Поэтому, используя подстановку t = sinx, приходим к табличному интегралу:

$\int \frac{\cos x\, dx}{4+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}arctg\frac{\sin x}{2} + C$

4. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}$

Из соотношения $d(e^x) = e^x dx$ получаем

$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}} = \int \frac{d(e^x)}{\sqrt{9-e^{2x}}}$

Воспользовавшись подстановкой $t = e^x$, приходим к табличному интегралу:

$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-(e^x)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{e^x}{3} + C$

5. $\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

Решение. Здесь используем подстановку $\sqrt[3]{x} = t$. Отсюда $x = t^3$, $dx = 3t^2dt$ и, следовательно по формуле (1) находим

$\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{\cos}{t^2}\, 3t^2dt = 3\int \cos t\, dt = 3\sin t + C$

Возвращаясь к старой переменной x, получим

$\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 3\sin\sqrt[3]{x} + C$

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

Применим подстановку $x = \frac{1}{t}$. Тогда $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $\sqrt{1+x^2} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$, $t = \frac{1}{x}$

По формуле (1) находим

$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\int \frac{tdt}{t^2\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| + C$

Возвращаясь к старой переменной x, получим

$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\ln\left|\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1^2}{x}}\right| + C = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right| + C = -\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right| + x$

Примеры для самостоятельного решения

Вычислите интегралы, используя метод замены переменной:

1. $\int e^{2x^2} x\,dx$
2. $\int \mathrm{tg}x dx$
3. $\int x\sin x^2\,dx$
4. $\int (2x^3+1)^4 x^2\,dx$
5. $\int \frac{\cos x dx}{3\sin x - 1}$
6. $\int \sqrt{4x^3+2}\,x^2 dx$
7. $\int \frac{dx}{sin^2(3x-2)}$
8. $\int \frac{dx}{5-2x}$
9. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}} dx$

Контроль знаний обучающихся:

- проверить практическую работу;

Требования к оформлению практической работы:

Задание должно быть выполнено в тетради для практических работ

Работу сдать после занятия

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА№ 10

Тема: Техника интегрирования. Интегрирование по частям

Цели:

- научиться применять метод интегрирования по частям при вычислении неопределенного интеграла

Оснащение занятия: конспект лекций.

<u>Критерии оценок</u>

оценка «5» ставится за верное выполнение всех заданий работы

оценка «4» ставится за верное выполнение любых шести заданий работы

оценка «3» ставится за верное выполнение любых пяти заданий работы

Порядок выполнения работы

Задание 1.

- Ознакомиться с лекцией № 11
- Выписать тетрадь примеры на применение метода замены переменной и метода интегрирования по частям при вычислении неопределенного интеграла

Задание 2.

Решить примеры для самостоятельного решения

Лекция 11.

Тема «Неопределенный интеграл. Интегрирование по частям».

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле$\int udv = uv - \int vdu,$ (1)

где u и v - непрерывно дифференцируемые функции от x. С помощью формулы (1) отыскание интеграла$\int udv$сводится к нахождению другого интеграла$\int vdu$, её применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен.

При этом в качестве u берется функция, которая при дифференцировании упрощается, а в качестве dv - та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Так при нахождении интегралов вида

$$\int P(x)e^{ax}dx, \int P(x)sinaxdx, \int P(x)cosaxdx$$

заu следует принять многочлен$P(x)$, а за dv - соответственно выражения$e^{ax}dx,\ sinaxdx,\ cosaxdx$; при отыскании интегралов вида

$$\int P(x)lnxdx, \int P(x)arcsinxdx, \int P(x)arccosxdx$$

за u принимаются соответственно функции $lnx, arcsinx, arccosx$, а за dv - выражение $P(x)dx$.

Примеры.

1. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

Решение. Положим u = lnx, dv = $\frac{dx}{x^3}$, откуда

du = $\frac{dx}{x}$, v = $\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}$

Тогда по формуле (1) находим

$\int \frac{\ln x}{x^3} dx = \ln x(-\frac{1}{2x^2}) - \int(-\frac{1}{2x^2})\frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$

2. $\int (x-5)\cos x \, dx$

Решение. Полагая u = $x - 5$, dv = cosx dx, найдем du =dx,

v = $\int \cos x \, dx = \sin x$.

Следовательно,

$\int (x-5)\cos x \, dx = (x-5)\sin x - \int \sin x \, dx = (x-5)\sin x + \cos x + C.$

3. $\int x^2 e^{4x} dx$

Решение. Пусть u = x^2, $e^{4x}dx = dv$; тогда du = 2x dx, v = $\int e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x}$

По формуле (1) находим

$\int x^2 e^{4x} dx = \frac{1}{4}x^2 e^{4x} - \frac{1}{2}\int x \ e^{4x} dx$ $\qquad (*)$

К последнему интегралу снова применим формулу интегрирования по частям.

Положим u = x, $e^{4x}dx = dv$; откуда du =dx, v = $\int e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x}$ и, следовательно, $\int x \ e^{4x}dx = \frac{1}{4}x \ e^{4x}$ $- \frac{1}{4}\int e^{4x}dx = \frac{1}{4}x \ e^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x}$

Подставляя найденное выражение в соотношение $(*)$, получим

$\int x^2 e^{4x}dx = \frac{1}{4}x^2 e^{4x} - \frac{1}{2}(\frac{1}{4}x \ e^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x}) + C = \frac{e^{4x}}{32}(8x^2 - 4x + 1) + C$

4. $\int x \ \mathrm{arctg}x \, dx$

Положим u = arctgx, dv =xdx , откуда du = $\frac{dx}{1+x^2}$, v = $\frac{1}{2}x^2$.

Используя формулу (1), находим

$\int x \ \mathrm{arctg}x \, dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}x^2\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx =$

$\frac{1}{2}x^2\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}(\int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}(x^2\mathrm{arctg}x - x + \mathrm{arctg}x) + C$

5. $\int e^{-x}\sin x \, dx$

Решение. Пусть u = e^{-x}, $\sin x \, dx = dv$; тогда du = - $e^{-x}dx$, v = - cosx.

Согласно формуле (1) имеем

I = $\int e^{-x}\sin x \, dx = = -e^{-x}(\cos x) - \int e^{-x}\cos x dx.$ $\qquad (*)$

К последнему интегралу снова применяем интегрирование по частям. Полагая u = e^{-x}, $\cos x dx = dv$, находим du = - $e^{-x}dx$, v = sinxи, следовательно, $\int e^{-x}\cos x dx = \int e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x \, dx$

Подставляя полученное выражение в соотношение $(*)$, приходим к уравнению с неизвестным интегралом I:

I = = - $e^{-x}\cos x$ - $e^{-x}\sin x$ – I,

Из которого находим

I = $-\frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \sin x) + C$

Примеры для самостоятельного решения

Вычислите интегралы, используя метод интегрирования по частям:

1. $\int x\sin x dx$
2. $\int x\cos x dx$
3. $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$

4. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$
5. $\int xe^x dx$
6. $\int \arcsin x dx$
7. $\int \mathrm{arctg} x dx$

Контроль знаний обучающихся:

- проверить практическую работу;

Требования к оформлению практической работы:

Задание должно быть выполнено в тетради для практических работ

Работу сдать после занятия

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА№ 11
Тема: Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница

Цели:

- повторить понятие определенного интеграла
- ознакомиться со свойствами определенного интеграла
- научиться применять формулу Ньютона – Лейбница для вычисления определенного интеграла

Оснащение занятия: конспект лекций.

<u>Критерии оценок</u>

оценка «5» ставится за правильные ответы на все вопросы и верное выполнение всех заданий работы

оценка «4» ставится за правильные ответы на все вопросы и верное выполнение любых десяти заданий работы

оценка «3» ставится за правильные ответы на все вопросы и верное выполнение любых восьми заданий работы

Порядок выполнения работы

Задание 1.

- Ознакомиться с лекцией № 12

Ответить на вопросы и ответы записать в тетрадь:

1. Что называется определенным интегралом?
2. Какие свойства определенного интеграла вы знаете?
3. Рассмотренные примеры записать в тетрадь.

Лекция 12.
Тема «Определенный интеграл и его непосредственное вычисление».

Пусть функция f(x) определена на отрезке [a, b]. Разобьем отрезок [a, b] на n частей точками a = $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$ = b, выберем на каждом элементарном отрезке [x_{k-1}, x_k] произвольную точку ε_kи обозначим через Δx_k длину каждого такого отрезка. ***Интегральной суммой*** для функции f(x) на отрезке [a, b] называется сумма вида

$\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\,\Delta x_k = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n.$ (1)

Определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a, b] называется предел интегральной суммы (1) при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\Delta x_k\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\,\Delta x_k$(2)

Если функция f(x) непрерывна на [a, b], то предел (2) существует и не зависит от способа разбиения отрезка [a, b] на элементарные отрезки и от выбора точекε_k (теорема существования определенного интеграла)

Основные свойства определенного интеграла.

1^0. *Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций:*

$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$

2^0. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:*

$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

3^0. *При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:*

$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)dx$

4^0. *Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:*

$\int_a^a f(x)dx = 0$

5^0. *Для определенного интеграла с симметричными пределами интегрирования имеют место следующие равенства:*

$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)dx$, если $f(x)$- четная функция

0, если $f(x)$ - нечетная функция

6^0. *Для любых трех точек, принадлежащих области существования определенного интеграла, справедлива формула:*

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Для вычисления определенного интеграла от функции f(x) в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл, служит **формула Ньютона – Лейбница**

$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(a) – F(b),$ (3)

т. е. определенный интеграл равен разности значений первообразных при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Примеры.

1. Вычислить интеграл: $\int_1^2 5x^4dx$

Решение. Найдем одну из первообразных F(x) для функции $5x^4$. Так как

$\int 5x^4dx = 5\cdot\frac{x^5}{5} + C = x^5 + C$, то $F(x) = x^5$.

Следовательно, по формуле Ньютона – Лейбница получаем

$\int_1^2 5x^4dx = x^5\Big|_1^2 = 2^5 - 1^5 = 32 – 1 = 31$

2. Вычислить интеграл: $\int_0^4 (3x - e^{\frac{x}{4}})dx$

Решение. Согласно формуле (3) находим

$\int_0^4 (3x - e^{\frac{x}{4}})dx = [\frac{3x^2}{2} - 4e^{\frac{x}{4}}]_0^4 = (24 – 4e) – (0 - 4) = 28 – 4e$

3. Вычислить интеграл: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2x}$

Решение. Согласно формуле (3) находим

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2x}$ - $-\text{ctg}x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -(\text{ctg}\frac{\pi}{3} - \text{ctg}\frac{\pi}{4}) = -(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1) = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

4. Вычислить интеграл: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

Решение. Согласно формуле (3) находим

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x\Big|_0^1 = \text{arctg } 1 – \text{arctg } 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

5. Вычислить интеграл:

Решение. По формуле Ньютона – Лейбница имеем

$\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^e = \ln e – \ln 1 = 1 – 0 = 1$

Задание 2.

Вычислить определенные интегралы, пользуясь формулой Ньютона – Лейбница:

1. $\int_{-5}^6 2dx$
2. $\int_1^3 x^2dx$
3. $\int_{-1}^0 (x^3 + 2x)dx$
4. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^3}$
5. $\int_1^2 (2x^3 + 4x - 2)dx$
6. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$

7. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ 8. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$

9. $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{12}} \sin 2x dx$ 10. $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^2 2x}$

11. $\int_{-\frac{1}{3}}^{1} (3x+1)^2 dx$ 12. $\int_{2}^{8} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Контроль знаний обучающихся:

- проверить практическую работу;

Требования к оформлению практической работы:

Задание должно быть выполнено в тетради для практических работ

Работу сдать после занятия

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА№ 12

Тема: Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Цели:

- познакомиться с понятием определителя второго и третьего порядков
- познакомиться с формулами Крамера для решения систем линейных уравнений
- научиться применять формулы Крамера для решения систем линейных уравнений второго и третьего порядков

Оснащение занятия: конспект лекций.

Критерии оценок

оценка «5» ставится за верное выполнение всех заданий работы

оценка «4» ставится за верное выполнение любых двух заданий работы

оценка «3» ставится за верное выполнение любого задания работы

Порядок выполнения работы

Задание 1.

- Ознакомиться с лекцией № 13

- Записать в тетрадь разобранные примеры по вычислению определителей второго и третьего порядков и примеры на решение систем линейных уравнений

Лекция 13.

Тема «Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера»

Определители второго и третьего порядков. *Определителем второго порядка* называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} называются элементами определителя; при этом элементы a_{11} и a_{22} образуют *главную диагональ,* а элементы a_{12} и a_{21}-*побочную диагональ.* Таким образом, определитель второго порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

Определителем третьего порядка называется число, определяемое

Равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Таким образом, каждый член определителя третьего порядка представляет собой произведение трех его элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Эти произведения берутся с определенными знаками: со знаком «плюс» - три члена, состоящие из элементов главной диагонали и из элементов, расположенных в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком «минус» - три члена, расположенные аналогичным образом относительно побочной диагонали.

Алгоритм решения систем линейных уравнений по формулам Крамера.

Габриель Крамер (1704–1752) швейцарский математик.

Данный метод применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, то есть ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных. Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0, $\det A \neq 0$.

Действительно, если какое-либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой-либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое-либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Система из двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

решается с помощью формул Крамера:

$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$,

где $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ и $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

При решении системы возможны три случая:

1. Определитель системы $\Delta \neq 0$. Тогда система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера.

2. Определитель системы $\Delta = 0$. Если при этом хотя бы один из определителей Δ_{x_1} и Δ_{x_2} не равен нулю, то система не имеет решений.

3. Если $\Delta = 0$, $\Delta_{x_1} = 0$ и $\Delta_{x_2} = 0$, то одно из уравнений есть следствие другого, система сводится к одному уравнению с двумя неизвестными и имеет бесчисленное множество решений.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13 \\ 2x_1 + 7x_2 = 81 \end{cases}$.

Решение. Вычислим определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 31 \neq 0$, и дополнительные определители $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 13 & -5 \\ 81 & 7 \end{vmatrix} = 496$, $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & 81 \end{vmatrix} = 217$

Система имеет единственное решение

$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{496}{31} = 16$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{217}{31} = 7$

Ответ: $(16,7)$.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 = 8 \end{cases}$.

Решение. Вычислим определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$, и дополнительные определители $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 48 = 44 \neq 0$, $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 2 = 22 \neq 0$. Коэффициенты уравнений системы пропорциональны, а свободные члены не подчинены той же пропорции. Система не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 \\ 3x_1 - 9x_2 = 3 \end{cases}$

Решение. Вычислим определитель системы $\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$, и дополнительные определители $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 0, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$.

Так как $\varDelta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = 0$, то одно уравнение есть следствие другого (второе уравнение получено из первого умножением на 3).

Система сводится к одному уравнению и имеет бесчисленное множество решений, каждое из которых вычисляется по формуле: $x_1 = 1 + 3x_2$, где числовые значения x_2 задаются произвольно и вычисляются соответствующие значения x_1.

Ответ: $x_1 = 1 + 3x_2$ – общее решение данной системы, а решения $x_2 = 1, x_1 = 4$ – частные.

Система из двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$$

Из основной матрицы $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ при помощи поочередного вычеркивания столбцов получаем определители

$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$, $\varDelta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$, $\varDelta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Дополнительные определители $\begin{vmatrix} a_{11} & \mathrm{b}_1 \\ a_{21} & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{12} & \mathrm{b}_1 \\ a_{22} & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{13} & \mathrm{b}_1 \\ a_{23} & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix}$.

Возможны три случая:

1. Если из трех определителей

$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$, $\varDelta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$, $\varDelta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

хотя бы один не равен нулю, то система имеет бесчисленное множество решений, причем одному неизвестному можно дать любое значение. Пусть, например, отличен от нуля $\varDelta_3$, тогда неизвестному x_3 можно придать любое значение (если $\varDelta_1 \neq 0$, то x_1, если $\varDelta_2 \neq 0$, то x_2), а исходную систему переписать в виде, $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \mathrm{b}_1 - a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \mathrm{b}_2 - a_{23}x_3 \end{cases}$. Отсюда неизвестные x_1 и x_2 определяются по формулам Крамера.

2. Все определители $\varDelta_1 = \varDelta_2 = \varDelta_3 = 0$, но один из определителей, $\begin{vmatrix} a_{12} & \mathrm{b}_1 \\ a_{22} & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{13} & b_1 \\ a_{23} & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix}$ не равен нулю. В этом случае система несовместна, то есть не имеет решений.

3. Все выписанные определители равны нулю. Система имеет бесчисленное множество решений.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2{,}5 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$

Решение. Основная матрица системы $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Вычислим определители $\varDelta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$, $\varDelta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$, $\varDelta_3 = 0\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} == 4 \neq 0$, система имеет бесчисленное множество решений.

Любое значение можно придать одному из неизвестных x_2 или x_3, так как $\Delta_2 \neq 0$ и $\Delta_3 \neq 0$. Неизвестному x_1 придать любое значение нельзя, так как $\Delta_1 = 0$.

Решим систему относительно x_1 и x_2 $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2{,}5 - 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 + 4x_3 \end{cases}$. Вычислим определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Вычислим

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2{,}5 - 2x_3 & -1 \\ 1 + 4x_3 & 2 \end{vmatrix} = 1{,}5 \text{ и } x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 2{,}5 - 2x_3 \\ 2 & 1 + 4x_3 \end{vmatrix} = 2x_3 - 1$$

Ответ: $x_1 = 1{,}5$, $x_2 = 2x_3 - 1$, $x_3 \in R$ – общее решение системы.

Система из трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

При решении системы из трех уравнений с тремя неизвестными возможны три случая:

1. Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$. Система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$,

$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$, где $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ и $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

2. Определитель системы равен нулю, $\Delta = 0$. Если при этом хотя бы один из определителей Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3}, не равен нулю, то система несовместна, решений не имеет.

3. Если $\Delta = 0$ и $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$, то система имеет бесчисленное множество решений.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$

Решение. Вычислим определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33$ и дополнительные определители

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33 \text{ и } \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 33, \Delta_{x_3} = 33.$$

По формулам Крамера имеем, что $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Ответ: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Задание 1. Решите системы линейных уравнений по формулам Крамера.

Примеры для самостоятельного решения.

1. $\begin{cases} 5x = 2y == 11 \\ 4x - y = 14 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8 \\ x + 5y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$

Контроль знаний обучающихся:

- проверить практическую работу;

Требования к оформлению практической работы:

Задание должно быть выполнено в тетради для практических работ

Работу сдать после занятия

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА№ 13

Тема: Действия над матрицами. Обратная матрица.

Цели:

- познакомиться с понятием матрицы
- познакомиться с действиями над матрицами
- познакомиться с понятием обратной матрицы.
- научиться решать примеры на действия с матрицами и на нахождение обратной матрицы.

Оснащение занятия: конспект лекций.

Критерии оценок

оценка «5» ставится за верное выполнение всех заданий работы

оценка «4» ставится за верное выполнение любых двух заданий работы

оценка «3» ставится за верное выполнение любого задания работы

Порядок выполнения работы

Задание 1.

- Ознакомиться с лекцией № 14
- Записать в тетрадь разобранные примеры на действия над матрицами и на вычисление обратной матрицы

Лекция 14.

Матрицы (и соответственно математический раздел - матричная алгебра) имеют важное значение в прикладной математике, так как позволяют записать в достаточно простой форме значительную часть математических моделей объектов и процессов. Термин "матрица" появился в 1850 году. Впервые упоминались матрицы еще в древнем Китае, позднее у арабских математиков.

Матрицей **A=A$_{mn}$** порядка m*n называется **прямоугольная таблица чисел, содержащая m - строк и n - столбцов**.

$$A = A_{mn} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = B_{mn} = (b_{ij}),\ C = C_{mn} = (c_{ij})$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \\ a_{21}\, a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы **a_{ij},** у которых i=j, называются диагональными и образуют **главную диагональ**.

Для квадратной матрицы (m=n) главную диагональ образуют элементы a_{11}, a_{22},..., a_{nn} .

Равенство матриц.

A=B, если порядки матриц **A** и **B** одинаковы и $a_{ij}=b_{ij}$ **(i=1,2,...,m; j=1,2,...,n)**
Действия над матрицами.
1. Сложение матриц - поэлементная операция

$$A_{mn}+B_{mn}=C_{mn}=\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{vmatrix}$$

2. Вычитание матриц - поэлементная операция

$$A_{mn}-B_{mn}=\begin{vmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{vmatrix}$$

3. Произведение матрицы на число - поэлементная операция

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

4. Умножение **A*B** матриц по правилу **строка на столбец** (число столбцов матрицы A должно быть равно числу строк матрицы B)
$\mathbf{A_{mk}*B_{kn}=C_{mn}}$ причем каждый элемент $\mathbf{c_{ij}}$ матрицы $\mathbf{C_{mn}}$ равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B , т.е.

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}=\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}$$

Например,

$$C_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+\dots+a_{1n}b_{n1}$$

$$C_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+\dots+a_{1n}b_{n2}$$

Покажем операцию умножения матриц на примере

$$\text{Пусть } A_{23}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{33}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{23}*B_{33}=C_{23}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1*(-1)+0*5+2*(-2) & 1*0+0*1+2*0 & 1*1+0*4+2*1 \\ 3*(-1)+1*5+0*(-2) & 3*0+1*1+0*0 & 3*1+1*4+0*1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Возведение в степень

$$A^m = \underbrace{A * A * \ldots * A}_{m\ раз}$$

m>1 целое положительное число. A - квадратная матрица (m=n) т.е. актуально только для квадратных матриц

6. Транспонирование матрицы A. Транспонированную матрицу обозначают A^T или A'

$$Если\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ то$$

$$A^T = A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Строки и столбцы поменялись местами

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Свойства операций над матрицами

A+B=B+A

(A+B)+C=A+(B+C)

λ(A+B)=λA+λB

A(B+C)=AB+AC

(A+B)C=AC+BC

λ(AB)=(λA)B=A(λB)

A(BC)=(AB)C

(A')'=A

(λA)'=λ(A)'

(A+B)'=A'+B'

(AB)'=B'A'

Виды матриц

1. Прямоугольные: **m** и **n** - произвольные положительные целые числа
2. Квадратные: **m=n**
3. Матрица строка: **m=1**. Например, (1 3 5 7) - во многих практических задачах такая матрица называется вектором
4. Матрица столбец: **n=1**. Например

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

5. Диагональная матрица: **m=n** и $a_{ij}=0$, если $i \neq j$. Например

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Единичная матрица: **m=n**

$$E=\delta_{ij}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$т.е.\ \delta_{ij}=0\ если\ i\neq j$

$\delta_{ij}=1\ если\ i=j$

7. Нулевая матрица: $a_{ij}=0$, **i=1,2,...,m**
j=1,2,...,n

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

8. Треугольная матрица: все элементы ниже главной диагонали равны 0.
Пример.

$$\begin{pmatrix}1&3&4\\0&2&5\\0&0&3\end{pmatrix}$$

9. Симметрическая матрица: **m=n** и $a_{ij}=a_{ji}$ (т.е. на симметричных относительно главной диагонали местах стоят равные элементы), а следовательно **A'=A**
Например,

$$\begin{pmatrix}0&1&3\\1&2&5\\3&5&4\end{pmatrix}$$

10. Кососимметрическая матрица: **m=n** и $a_{ij}=-a_{ji}$ (т.е. на симметричных относительно главной диагонали местах стоят противоположные элементы). Следовательно, на главной диагонали стоят нули (т.к. при **i=j** имеем $a_{ii}=-a_{ii}$)
Пример.

$$\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&0&-3\\-2&3&0\end{pmatrix}$$

Ясно, **A'=-A**

Обратная матрица - определение.

Понятие обратной матрицы вводится лишь для квадратных матриц, определитель которых отличен от нуля, то есть для невырожденных квадратных матриц.

Определение. **Невырожденной** называется квадратная матрица, определитель которой не равен нулю. Квадратная матрица называется **вырожденной**, если ее определитель равен нулю.

Квадратная матрица A^{-1} называется **обратной** к невырожденной матрице A, если $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, где E - это единичная матрица соответствующего порядка.

Обратная матрица существует только для **квадратных** матриц с **не равными нулю** определителями.

Свойства обратной матрицы:

1° $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

2° $(\lambda\cdot A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\cdot A^{-1}$

3° $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

4° $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

1. вычислить определитель матрицы
2. транспонировать матрицу A
3. вычислить алгебраические дополнения всех элементов транспонированной матрицы
4. составляем матрицу A*(союзная или присоединенная)

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$$

4. $A^{-1} = \frac{A^*}{\Delta}$

Пример 12: Найти обратную матрицу для матрицы

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Решение: Т.к. определитель равен $\Delta = -9 \neq 0$, то обратная матрица имеет место быть.

Транспонируем матрицу $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Вычислим все алгебраические дополнения транспонированной матрицы

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Т.е. союзная матрица имеет вид $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

Обратная матрица имеет вид $A^{-1} = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Примеры для самостоятельного решения

Задание 2.

1. Решить матричное уравнение 2A + X = B, где A = $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. Даны матрицы A =$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; C =$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Вычислить: а) элементы a_{21} и a_{12} произведений AB и BA

б) элемент a_{32} произведения AC

в) элемент a_{31} произведения CB

3.Найти обратные матрицы A^{-1} и B^{-1}, если

A = $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

Проверьте, верно ли они найдены.

Контроль знаний обучающихся:

- проверить практическую работу;

Требования к оформлению практической работы:

Задание должно быть выполнено в тетради для практических работ

Работу сдать после занятия

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА№ 14

Тема: Решение систем линейных уравнений матричным методом.

Цели:
- рассмотреть матричный метод решения систем линейных уравнений
- рассмотреть примеры решения систем линейных уравнений матричным методом
- научиться применять матричный метод для решения СЛУ

Оснащение занятия: конспект лекций.

<u>Критерии оценок</u>

оценка «5» ставится за верное выполнение всех заданий работы
оценка «4» ставится за верное выполнение любых двух заданий работы
оценка «3» ставится за верное выполнение любого задания работы

Порядок выполнения работы

Задание 1.
- Ознакомиться с лекцией № 15
- Записать в тетрадь разобранные примеры на решение систем линейных уравнений матричным методом

Лекция 16.

Матричный метод решения систем линейных уравнений

Введем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и матрицы $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$. Пусть $\det A \neq 0$.

Представим систему (1.10) в виде матричного уравнения AX=B. Это легко проверить, перемножив матрицы A и X.

Действительно,

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = B.$$

Решим теперь матричное уравнение $A \cdot X = B$. Умножим обе части уравнения на матрицу A^{-1} слева. Тогда $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, а так как
$A^{-1} \cdot A = E$, то имеем $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$ и, наконец,

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (1.12)$$

Пример 17. Матричным методом решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - 2z = 6, \\ 2x + 3y - 7z = 16, \\ 5x + 2y + z = 16. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель матрицы A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

то есть матрица A невырожденная. Построим обратную матрицу A^{-1}. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3 & -7\\ 2 & 1\end{vmatrix}=17,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-5,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -7\end{vmatrix}=-1,$$
$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & -7\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-37,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=11,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -7\end{vmatrix}=3,$$
$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-11,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}=3,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=1,$$

Следовательно,

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}17 & -5 & -1\\ -37 & 11 & 3\\ -11 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Находим теперь решение системы по формуле (1.12).

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}17 & -5 & -1\\ -37 & 11 & 3\\ -11 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\ 16\\ 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & -5 & -1\\ -37 & 11 & 3\\ -11 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 8\\ 8\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}17\cdot 3-5\cdot 8-1\cdot 8\\ -37\cdot 3+11\cdot 8+3\cdot 8\\ -11\cdot 3+3\cdot 8+1\cdot 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\end{pmatrix},$$ то есть

$x = 3$, $y = 1$, $z = -1$.

Примеры для самостоятельного решения

Задание 2.

Представить систему уравнений в виде одного матричного уравнения и найти её решение с помощью обратной матрицы

а) $\begin{cases} x-2y=3 \\ -2x+3y=-7 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-2y-3z=-4 \\ 4x+y+2z=13 \\ 2x+5y+z=-7 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x+y+5z=0 \\ 2x+3y+3z=3 \\ 2x+y+4z=-1 \end{cases}$

Контроль знаний обучающихся:

- проверить практическую работу;

Требования к оформлению практической работы:

Задание должно быть выполнено в тетради для практических работ

Работу сдать после занятия

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА№ 15

Тема: Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

Цели:

- ознакомиться с понятием комплексного числа, геометрической интерпретацией комплексного числа, заданного в алгебраической форме
- научиться осуществлять действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

Оснащение занятия: конспект лекций.

<u>Критерии оценок</u>

оценка «5» ставится за правильные ответы на поставленные вопросы и верное выполнение всех заданий работы

оценка «4» ставится за правильные ответы на поставленные вопросы и верное выполнение любых десяти заданий работы

оценка «3» ставится за правильные ответы на поставленные вопросы и верное выполнение любых восьми заданий работы

Порядок выполнения работы

Задание 1.

- Ознакомиться с лекцией № 16 и ответить письменно на вопросы:

1. Сформулировать основные определения комплексного числа и формы представления.
2. Как записывается комплексное число в алгебраической (тригонометрической) форме и по каким правилам проводятся арифметические операции над ними
3. Что означает в определении комплексного числа фраза «упорядоченная пара действительных чисел»?
4. 3. Какое из этих чисел называется «действительной частью Rez», какое «мнимой Imz»?
5. В каком случае комплексное число является обычным действительным числом?
6. При каких условиях считается , что два комплексных числа равны?
7. По каким правилам осуществляются действия и находятся: сумма, разность, произведение и частное двух комплексных чисел?
8. Какое комплексное число называется сопряженным к заданному и какими свойствами оно обладает?
9. Что называют «мнимой единицей» , как ее обозначают, и что получается при возведении ее в старшую степень ?
10. Что называют комплексной плоскостью, действительной и мнимой осями и как изображается комплексное число на комплексной плоскости?

Лекция 16

Комплексные числа.

Определение. Комплексным числом *z* называется ***упорядоченная пара чисел (a,b),*** *над множеством которых по определенным правилам можно производить следующие операции: сложение , умножение, деление, возведение в степень результаты которых также являются комплексными числами.*

Определение.Алгебраической формой компле5ксного числа*z*называется выражение $z = a + ib$, где *a*и *b* – действительные числа, *i* – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$i^2 = -1; \qquad i = \sqrt{-1}.$

При этом число *a* называется **действительной частью** числа *z* (*a = Rez*), а *b*- **мнимой частью** (*b = Imz*).

Если *a =Rez =0,* то число *z* будет чисто мнимым, если *b = Imz = 0*, то число *z* будет действительным.

Определение. Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются **комплексно – сопряженными.**

Определение. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

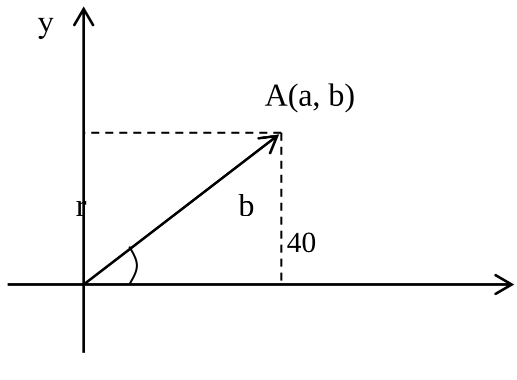
$a_1 = a_2; \qquad b_1 = b_2;$

Определение. Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$a = b = 0.$

Понятие комплексного числа имеет **геометрическое истолкование**. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, (комплексной плоскости z) координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.



φ

0 a x

Таким образом, на оси OX располагаются действительные числа a, а на оси OY – чисто мнимые-b.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой **тригонометрической форме.**

<u>Тригонометрическая форма числа.</u>

Из геометрических соображений видно, что $a = r\cos\varphi;\quad b = r\sin\varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой записи комплексного числа.**

При этом величина r называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона φ - **аргументом** комплексного числа.

$r = |z|; \qquad \varphi = Arg\ z$.

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2};\quad \varphi = Arg\,z = arctg\frac{b}{a};$$

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$|z| = |\bar{z}|; \qquad Arg\ z = -Arg\ \bar{z}.$

<u>Действия с комплексными числами</u>.

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1) **Сложение и вычитание.**

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}$$

2) **Умножение.**

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2 b_1b_2$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$$

С случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

3) **Деление.**

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$z = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме

Алгебраической формой комплексного числа $z = (a,b)$.называется алгебраическое выражение вида

$z = a + bi$.

Арифметические операции над комплексными числами $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$, записанными в алгебраической форме, осуществляются следующим образом.

1. Сумма (разность) комплексных чисел

$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\cdot i,$

т.е. сложение (вычитание) осуществляются по правилу сложения многочленов с приведением подобных членов.

2. Произведение комплексных чисел

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)\cdot i,$

т.е. умножение производится по обычному правилу умножения многочленов, с учетом того, что $i^2=1$.

3. Деление двух комплексных чисел осуществляется по следующему правилу:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)}{(a_2 + b_2 i)} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a^2 + b^2} = \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + (b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2)\cdot i}{a^2 + b^2}, \ (z_2 \neq 0),$$

т.е. деление осуществляется умножением делимого и делителя на число, сопряженное делителю.

Возведение в степень комплексных чисел определяется следующим образом:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \ldots z}_{n\ раз}.$$

Легко показать, что

$z^n z^m = z^{n+m}$,

$(z^n)^m = z^{nm}$,

$(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n$.

Примеры.

1. Найти сумму комплексных чисел $z_1 = 2 - i$ и $z_2 = -4 + 3i$.

$z_1 + z_2 = (2 + (-1)\cdot i) + (-4 + 3i) = (2 + (-4)) + ((-1) + 3)\, i = -2+2i.$

2. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -4 + 5i$.

$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (-4 + 5i) = 2 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-3i) + 2\cdot 5i - 3i\cdot 5i = 7+22i.$

3. Найти частное z от деления $z_1 = 3 - 2$на $z_2 = 3 - i$.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(3-2i)}{(3-i)} = \frac{(3-2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{11-3i}{9+1} = \frac{11}{10} - \frac{3}{10} i.$$

4. Решить уравнение: $3x - (1-i)(x - yi) = 2 + 3i$, x и $y \in \mathbf{R}$.

$3x - ((x - y) + (-x - y)i) = 2 + 3i$

$(2x + y) + (x + y)i = 2 + 3i.$

В силу равенства комплексных чисел имеем:

$$\begin{cases} 2x + y = 2, \\ x + y = 3, \end{cases}$$

откуда $x = -1$, $y = 4$.

5. Вычислить: i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^{-1}, i^{-2}.

$i^2 = i \cdot i = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$

$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -(-1) = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1$

$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = -i$

$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = -1.$

6. Вычислить z^{-3}, если $z = 1 - i$.

$$z^{-3} = (1-i)^{-3} = \frac{1}{(1-i)^3} = \frac{1}{1-3i+3i^2-i^3} = \frac{1}{-2-2i} = \frac{-2+2i}{(-2)^2+(-2)^2} =$$

$$= \frac{-2+2i}{8} = -0.25 + 0.25i.$$

7. Вычислить число z^{-1} обратное числу z=3-i.

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{3-i} = \frac{3+i}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i}{3^2+1^2} = \frac{3+i}{10} = 0.3 + 0.1i.$$

Задание 2. Решить примеры для самостоятельного решения

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить:
   1) $(3 – 2i) + (5 + 3i)$;
   2) $(1 + 2i) – (3 – i)$;
   3) $3(2 – i)\cdot(1 – i)$;
   4) $(1 + 3i)(–7 + 2i)$;
   5) $(2 – i)^2$;
   6) $(1 + 2i)^3$.

2. Найти решение уравнений ($x, y \in \mathbf{R}$):
   1) $(1 + i)x + (2 + i)y = 5 + 3i$;
   2) $2x + (1 + i)(x + y)=7 +i$;
   3) $(3 – y + x)(1 + i) + (x – y)(2 + i) = 6 – 3i$.

3. Вычислить:

1) i^{13}; 2) i^{65}; 3) $\left(\frac{1}{1-i}\right)^2$;

4) $\frac{5}{1+2i}$; 5) $\frac{2i-3}{1+i}$; 6) $\frac{2+3i}{i}$;

7) $\frac{1+2i}{-2+i}(-i)+1$; 8) $\frac{2+i}{2-i}-(3+4i)+\frac{4-i}{3+2i}$; 9) $(2-i)^2$.

4. Найти z^{-1}, если:

1) $z = 7 – 12i$; 2) $z = 3 + 4i$; 3) $z = –3 + 7i$; 4) $z = i$.

5. Вычислить:

1) $(1 + i\sqrt{3})^3(1 – i)^7$; 2) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-12}$; 3) $\frac{(1+i)^8}{(-1+i)^4}$.

6. Доказать, что $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$; $\overline{-z_1} = -\overline{z_1}$.

7. Доказать, что если $z = a + bi$, то $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2}$.

8. Построить точки, соответствующие комплексным числам:

-1; i; $-\sqrt{2}$; $-3i$; $2-3i$; $-4-2i$; $3+i$; $-6+2i$; $2+2i$; $-2+2i$; $-2-2i$.

9. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел, изобразить геометрически данные числа и результаты действий.

1) $z_1=-2+i,\quad z_2=3-i$; 2) $z_1=-3,\quad z_2=4i$.

10. Изобразить геометрическое множество всех комплексных чисел $z=x+yi$, для которых:

1) $x=2$;2) $1\le x\le 3$; 3) Re z = Imz ; 4) Imz = 2Re z.

11. Найти модуль и аргумент следующих комплексных чисел и представить их на комплексной плоскости:

1) $z=1+i$; 2) $z=\sqrt{3}-i$; 3) $z=\sqrt{2}i$; 4) $z=2$; 5) $z=-i$.

12. Указать на комплексной плоскости множества точек, соответствующие комплексным числам z, удовлетворяющие условиям:

1) $|z|=1$; 2) $|z|\le 5$; 3) $1\le|z|\le 2$; 4) $\arg z=0$;

5) $\frac{\pi}{6}\le\arg z\le\frac{\pi}{4}$; 6) $|z-1|=\frac{1}{3}$; 7) $|z-3+2i|\le 2$.

Контроль знаний обучающихся:

проверить практическую работу;

Требования к оформлению практической работы:

Задание должно быть выполнено в тетради для практических работ

Работу сдать после занятия

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА№ 16

Тема: Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической и

Цели:

- ознакомиться с тригонометрической и показательной формой комплексного числа
- научиться осуществлять действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической и показательной формах

Оснащение занятия: конспект лекций.

Критерии оценок

оценка «5» ставится за правильные ответы на поставленные вопросы и верное выполнение всех заданий работы

оценка «4» ставится за правильные ответы на поставленные вопросы и верное выполнение любых девяти заданий работы

оценка «3» ставится за правильные ответы на поставленные вопросы и верное выполнение любых семи заданий работы

Порядок выполнения работы

Задание 1.

- Ознакомиться с лекцией № 23 и ответить письменно на вопросы:

1. Запишите комплексное число в алгебраической и тригонометрической формах, а также основные соотношения связывающие их.
2. По каким правилам осуществляются действия над комплексными числами в тригонометрической форме: произведение, возведение в степень, деление?
3. Какой вид имеет формула Муавра при возведении комплексного числа в натуральную степень?
4. Что называют « корнем n- степени из комплексного числа» ?
5. Сколько возможных значений имеет корень степени n=5 из комплексного числа z= 1-2i ?
6. Как выглядит общая формула Муавра для извлечения корня n- степени из комплексного числа ?
7. Как выглядит показательная форма комплексного числа и записывается формула Эйлера?
8. С помощью формулы Эйлера запишите операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

Лекция 23

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

1. Умножение.

При перемножении чисел z_1 и z_2, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

(Формула справедлива для любого конечного числа сомножителей.)

$z_1 \ldots z_n = r_1 \ldots r_n(\cos(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n))$.

Если $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то последняя принимает вид

$z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

и называется *формулой Муавра*. Она показывает, что для возведения комплексного числа в натуральную степень нужно возвести в эту степень его модуль, а аргумент умножить на показатель степени.

Примеры.

1) Выполнить умножение:

$$z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}), \quad z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}), \quad z_1 \cdot z_2 = 6(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})) =$$

$$= 6(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}).$$

2) Вычислить: $(1+i)^{30}$.

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}), \quad (1+i)^{30} = \left(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\right)^{30} = \left(\sqrt{2}\right)^{30}(\cos\frac{30\pi}{4} + i\sin\frac{30\pi}{4}) =$$

$$= 2^{15}(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}).$$

2. Деление.

Если $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

т.е. модуль частного двух комплексных чисел z_1 и z_2 равен частному модулей, а аргумент частного – разности аргументов.

Пример.

$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, $z_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$. Найти частное.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{3})) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}).$$

Формула Муавра ($\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos n\varphi + i\sin\varphi, \quad n \in N$) находит много применений. Так, например, если $n = 3$, то, возведя левую часть по формуле сокращенного умножения в куб, получим равенство

$$\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = \left(\cos^3\varphi - 3\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi\right) + \left(3\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi - \sin^3\varphi\right)i.$$

Из равенства комплексных чисел и основного тригонометрического тождества получаем

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$

$$\sin 3\varphi = -4\sin^3\varphi + 3\sin\varphi.$$

С помощью формулы Муавра можно находить суммы тригонометрических функций.

Например, найдем сумму $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \ldots + \sin(2n-1)x, \quad x \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Рассмотрим сумму $S(x) = (\cos x + i\sin x) + (\cos 3x + i\sin 3x) + \ldots + (\cos(2n-1)x + i\sin(2n-1)x)$.

Из формулы Муавра имеем: $(\cos kx + i\sin kx) = (\cos x + i\sin x)^k$.

Таким образом, сумма $S(x)$ примет вид:

$S(x) = (\cos x + i\sin x) + (\cos x + i\sin x)^3 + ... + (\cos x + i\sin x)^{2n-1}$.

Эта сумма есть геометрическая прогрессия из n слагаемых с первым членом $b_1 = \cos x + i\sin x$ и знаменателем прогрессии $q = (\cos x + i\sin x)^2$. По формуле $S = \dfrac{b_1 - q^n b_1}{1-q}$ для суммы n членов геометрической прогрессии, имеем

$$S(x) = \frac{(\cos x + i\sin x) - (\cos x + i\sin x)^{2n+1}}{1-(\cos x + i\sin x)^2} = \frac{(\cos x + i\sin x) - (\cos(2n+1)x + i\sin(2n+1)x)}{1-\cos^2 x + \sin^2 x - 2i\sin x\cos x} =$$

$$= \frac{(\cos x - \cos(2n+1)x) + i(\sin x - \sin(2n+1)x)}{2\sin x(\sin x - i\cos x)} =$$

$$= \frac{((\cos x - \cos(2n+1)x) + i(\sin x - \sin(2n+1)x))(\sin x + i\cos x)}{2\sin x} =$$

$$= \frac{(\cos x - \cos(2n+1)x)\sin x - (\sin x - \sin(2n+1)x)\cos x}{2\sin x} +$$

$$+ i\frac{((\sin x - \sin(2n+1)x)\sin x + (\cos x - \cos(2n+1)x)\cos x)}{2\sin x}.$$

$$\operatorname{Im} S(x) = \frac{\sin^2 x - (\sin(2n+1)x)\sin x + \cos^2 x - (\cos(2n+1)x)\cos x}{2\sin x} = \frac{1-\cos 2nx}{2\sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

$$\operatorname{Re} S(x) = \frac{\cos x\sin x - (\cos(2n+1)x)\sin x - \sin x\cos x + (\sin(2n+1)x)\cos x}{2\sin x} = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$$

В исходном выражении для $S(x)$ было:

$\operatorname{Im} S(x) = \sin x + \sin 3x + ... + \sin(2n-1)x$,

$\operatorname{Re} S(x) = \cos x + \cos 3x + ... + \cos(2n-1)x$.

Сравнивая мнимые и действительные части, получаем следующие формулы:

$$\sin x + \sin 3x + ... + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x},$$

$$\cos x + \cos 3x + ...\cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$$

3. Извлечение корня из комплексного числа

Корнем *n*-ой степени, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, из числа z называется любое комплексное число u, для которого n-ая степень равна z:

$\sqrt[n]{z} = u, \ z = u^n$.

В поле комплексных чисел справедлива следующая **теорема.**

Для любого $z \neq 0$ извлечение корня n-ой степени, $n \geq 2$, из числа z всегда возможно и имеет ровно nразличных значений.

Пусть$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Искомый корень n-ой степени обозначим

$u = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$.

По определению корня имеем $u^n = z$. Откуда следует, что

$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Из равенства комплексных чисел получаем:

$$\begin{cases} \rho^n = r, \\ n\theta = \varphi + 2\pi k, \quad k \in Z. \end{cases}$$

Так как $r = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt[n]{r}$.

Таким образом, модуль комплексного числа u определяется как арифметический корень из действительного положительного числа r, а аргумент находят по формуле

$$\theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Общая формула Муавра

$$u_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}),\ k = \overline{0, n-1}.$$

Пример.

Вычислить $u = \sqrt[6]{\sqrt{3} - i}$.

Представим число $z = \sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме:

$$\sqrt{3} - i = 2(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)),$$

Поэтому согласно общей формуле Муавра

$$u_k = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{6},$$

где k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Таким образом, значения корней:

$$u_0 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{36} - i\sin\frac{\pi}{36}),$$

$$u_1 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 1}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 1}{6}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{11\pi}{36} + i\sin\frac{11\pi}{36}),$$

$$u_2 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 2}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 2}{6}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{23\pi}{36} + i\sin\frac{23\pi}{36}),$$

$$u_3 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 3}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 3}{6}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{35\pi}{36} + i\sin\frac{35\pi}{36}),$$

$$u_4 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 4}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 4}{6}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{47\pi}{36} + i\sin\frac{47\pi}{36}),$$

$$u_5 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 5}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi\cdot 5}{6}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{59\pi}{36} + i\sin\frac{59\pi}{36}).$$

Геометрически корни можно интерпретировать как числа, изображающие в комплексной плоскости вершины правильного *n*угольника (в рассмотренном примере – шестиугольника), вписанного в окружность радиусом $\sqrt[n]{r}$ (в рассмотренном примере – радиусом $\sqrt[6]{2}$), с центром в начале координат.

Примеры.

Найти: 1) $\sqrt[4]{1}$, 2) $\sqrt[3]{i}$, 3) $\sqrt[3]{1}$.

Решение.

1) $u_k = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1(\cos 0 + i\sin 0)} = \sqrt[4]{1}(\cos\frac{0 + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{0 + 2\pi k}{4}),\quad k \in \{0, 1, 2, 3\},$

u_0 =cos0 + $i$sin0 = 1,

$$u_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$u_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$u_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

2) $u_k = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1\cdot(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})} = \sqrt[3]{1}(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}) =$

$= \cos\frac{\pi+4\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi+4\pi k}{6}$, $k = 0, 1, 2.$

$u_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$,

$u_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i)$,

$u_2 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$

3) $u_k = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)} = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3}$, $k = 0, 1, 2.$

$u_0 = \cos\frac{2\pi\cdot 0}{3} + i\sin\frac{2\pi\cdot 0}{3} = 1$,

$u_1 = \cos\frac{2\pi\cdot 1}{3} + i\sin\frac{2\pi\cdot 1}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$u_2 = \cos\frac{2\pi\cdot 2}{3} + i\sin\frac{2\pi\cdot 2}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Задание 1. Решить примеры для самостоятельного решения

Примеры для самостоятельного решения:

1. Представить следующие комплексные числа в тригонометрическом виде:
   1) $1,\ -1,\ \ i,\ \ -i$;
   2) $z = 3 - 3i$;
   3) $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}i}{2}$.

2. Даны числа

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8},\quad z_2 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12},\quad z_3 = \cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}.$$

Вычислить: 1) $z_1z_2z_3$; 2) $\frac{z_1}{z_2z_3}$; 3) $\frac{z_1z_2}{z_3}$; 4) $\frac{z_1z_3}{z_2}$.

3. Вычислить $|z|$ и $\arg z$, если $z = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$.

4. Упростить выражение $\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi}$.

5. Вычислить корни и результат изобразить на комплексной плоскости.

1) $\sqrt[4]{1}$; 2) $\sqrt[4]{i}$; 3) $\sqrt[3]{-1+i}$.

6. Выразить в радикалах корни из единицы степени 2, 3, 4, 6, 8.

Контроль знаний обучающихся:

- проверить практическую работу;

Требования к оформлению практической работы:

Задание должно быть выполнено в тетради для практических работ

Работу сдать после занятия

ЛИТЕРАТУРА

1. *Башмаков М.И.* Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учебник для студентов профессиональных образовательных организаций, осваивающих профессии и специальности СПО. – М.,2017
2. *Башмаков М.И.* Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: Сборник задач профильной направленности: учеб. пособие для студентов профессиональных образовательных организаций, осваивающих профессии и специальности СПО. – М.,2017
3. *Башмаков М.И.* Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: Задачник: учеб. пособие для студентов профессиональных образовательных организаций, осваивающих профессии и специальности СПО. – М.,2018
4. Электронный учеб.- метод. комплекс для студентов профессиональных образовательных организаций, осваивающих профессии и специальности СПО. – М.,2017
5. *Гусев В.А., Григорьев С.Г., Иволгина С.В.* Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учебник для студентов профессиональных образовательных организаций, осваивающих профессии и специальности СПО. – М.,2019